Cálculo para Informática (21157)
2ª Actividade Formativa

1 Calcule o limite $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{x^3}$

Sugestão: Use a regra da Substituição.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{sen^3(x)\frac{x^3}{sen^3(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{sen^3(x)}\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x)}{x^3}=$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{sen^3(x)}$ pois $\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x)}{x^3}=1$ uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$ por outro lado pela regra da substituição (ver manual pág 69) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{sen^3(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}$ pois $\lim_{x\to 0}sen^3(x)=0$ e por seu turno $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$esta última igualdade pode ser vista de vários modos, ou utilizando directamente a regra de Cauchy$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{1+y}=1$ ou atendendo a que a $f'(0)=1$ em que $f(y)=\log(1+y)$ logo $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+sen^3(x))}{x^3}=1$

Nota: Se a função $f:R\to R$ admitir derivada no ponto a e $f'(a)=1$ então $f(x)-f(a)\sim x-a$ quando $x\to a$ pois $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1$, usando este resultado em conjunto com a regra de substituição pode-se obter várias funções equivalentes por exemplo quando $x\to 0$ $\exp(x^n)-1\sim x^n$ em que $n\in N$

2 Prove que a sucessão x_n tal que $x_1=1$ e $x_{n+1}=\sqrt{x_n}-\frac{1}{4}$ é convergente e calcule o seu limite.

Sugestão: Tenha em consideração que se $f:R\to R$ é uma função contínua e se $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ então $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$

Se $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ então deverá ter-se que $x = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$ uma vez que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ (Ver ex1 da 1ª actividade formativa) e $\sqrt{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x}$ pois $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função contínua. Resolvendo a equação $x = \sqrt{x} - \frac{1}{4}$ tem-se $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x$ ou seja $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = 0$ que tem como solução $x = \frac{1}{4}$.

Se provarmos que $x_n > \frac{1}{4}$ todo o $n \in N$, e que a sucessão x_n é decrescente tem-se que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$ uma vez que toda a sucessão decrescente e limitada inferiormente é convergente e vimos que no caso de ser convergente o seu limite é $\frac{1}{4}$.

Vamos provar por indução que $x_n > \frac{1}{4}$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_1 = 1 > \frac{1}{4}$, supondo que $x_n > \frac{1}{4}$ vamos provar que $x_{n+1} > \frac{1}{4}$ ora $x_{n+1} = \sqrt{x_n} - \frac{1}{4}$ e como $x_n > \frac{1}{4}$ tem-se que $\sqrt{x_n} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ logo $x_{n+1} = \sqrt{x_n} - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Para provar que a sucessão é decrescente, vamos provar por indução que se tem $x_{n+1} \le x_n$ para todo o $n \in N$, a propriedade é válida para $n = 1$ pois $x_2 = \frac{3}{4} < 1 = x_1$ supondo que $x_{n+1} \le x_n$ queremos provar que $x_{n+2} \le x_{n+1}$ o que acontece pois $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \frac{1}{4} \le \sqrt{x_n} - \frac{1}{4} = x_{n+1}$ logo a sucessão dada é convergente e tem como limite o valor $\frac{1}{4}$.

3 Seja $f : R \to R$ uma função par,. se f é diferenciável no ponto $a > 0$, com $f'(a) = k$ calcule $f'(-a)$.

$$f'(-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = -k$$

4 Ache o ponto da parábola $y = x^2$ que está mais próximo do ponto $A = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.

A distância entre um ponto genérico da parábola $P=(x,x^2)$ e o ponto $A=\left(2,\frac{1}{2}\right)$ é dada pela função

$f(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$, o valor de x que minimiza a função f é a abcissa do ponto procurado, como *f* é diferenciável em *R* se *a* é um extremo deverá ter-se $f'(a)=0$ como

$f'(x)=\dfrac{2x^3-2}{\sqrt{(x-2)^2+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}}$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$, para se provar que $x=1$ é a abcissa do ponto procurado falta ver que $x=1$ é um ponto mínimo da função *f* para tal deve-se ter em conta que

$f''(x)=\dfrac{6xf(x)-(2x^3-2)f'(x)}{f^2(x)}$ logo $f''(1)=\dfrac{6\sqrt{1+\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}}>0$ (Ver proposição 5 pág 127 do manual)

uma vez que $f'(1)=0$ e pelo resultado anterior $x=1$ é mínimo da função *f* e é único pois a derivada tem um único zero e está definida em *R*, logo o ponto procurado é o ponto $(1,1)$.

Uma forma mais expedita em termos de cálculos de resolver o anterior problema consiste na observação de que se $f:R\to R$ é uma função diferenciável e $f(a)\geq 0$ então $a\in R$ é um mínimo (máximo) da função $f(x)$ se e somente se $a\in R$ é um mínimo (máximo) da função $f^2(x)$.

5 Seja $f:R\to R$ definida por $f(x)=x^3+x-1$.Prove que a função f tem uma única raiz em R

$f(0)=-1<0$ e $f(1)=1>0$ logo pelo teorema de Bolzano a função tem pelo menos uma raiz por outro lado $f'(x)=3x^2+1$ logo pelo corolário do teorema de Rolle a função tem no máximo uma raiz donde o resultado (Ver manual pág 109)

6 Prove que a função $f(x)=x^{10}+x^2-1$ tem duas e somente duas raízes em *R*.

$f(0)=-1$ e $f(\pm 1)=1$ logo pelo teorema de Bolzano $\exists c_1\in\left]-1,0\right[$ e $\exists c_2\in\left]0,1\right[$ tal que $f(c_1)=f(c_2)=0$ ou seja a função tem pelo menos duas raízes por outro lado $f'(x)=10x^9+2x=x(10x^8+2)$ se existissem mais do que duas raízes pelo teorema de Rolle $f'(x)$ teria pelo menos duas raízes , e como $f'(x)$ só tem uma raiz a função *f* tem duas e somente duas raízes .

7 Prove que $\log(1+x)-\log(x)<\dfrac{1}{x}$ para $x\in\left]0,+\infty\right[$

Pelo teorema de Lagrange (Ver manual pág 109) tem-se que $\log(1+x)-\log(x)=\dfrac{(x+1-x)}{c}=\dfrac{1}{c}$ em que $c\in\left]x,1+x\right[$ como $c>x$ tem-se que $\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$ donde o resultado.

8 Prove que o rectângulo de área máxima para um dado perímetro é um quadrado.

Se x for a base e y a altura de um rectângulo a sua área é dada por $A=xy$ por outro lado tem-se $2x+2y=P$ em que P é o perímetro que é fixo por hipótese logo $A(x)=x.\dfrac{P-2x}{2}$ a derivada $A'(x)=\dfrac{P-2x}{2}-x=\dfrac{P-4x}{2}$ anula-se para $x=\dfrac{P}{4}$ que é máximo pois $A''\left(\dfrac{P}{4}\right)=-2<0$ então f admite um máximo local no ponto *a*, é o único máximo uma vez que a derivada só se anula para $x=\dfrac{P}{4}$, como $y=\dfrac{P-2x}{2}$ tem-se que para $x=\dfrac{P}{4}$ $y=\dfrac{P}{4}$ donde se tem que o rectângulo de área máxima para um dado perímetro é um quadrado.

9 Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{sen^5(x)}$ Justifique

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{sen^5(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5\,\frac{sen^5(x)}{x^5}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$ pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^5(x)}{x^5}$ por ourto lado $sen(x)-x+\dfrac{x^3}{6}=\dfrac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)$ (Ver ex 3 manual pág 124) logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x+\frac{x^3}{6}}{sen^5(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)}{x^5}=\frac{1}{5!}$$

10 Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{tg^2(x)-sen^2(x)}$ Justifique

Pode-se aplicar de imediato a regra de Cauchy mas é preferível simplificar primeiro a expressão $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{tg^2(x)-sen^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{\dfrac{sen^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)}{\cos^2(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{sen^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)}$ uma vez que

$\lim\limits_{x\to 0}\cos^2(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{sen^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{sen^4(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos(x)-x^2}{x^4}$ pois

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^4(x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{sen(x)}{x}\right)^4=1$ uma vez que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$

aplicando sucessivamente a regra de Cauchy tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2sen(x)-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2sen(x)}{24x}=\frac{-1}{12}$$

O problema também pode ser resolvido mediante os desenvolvimentos de Taylor.

11 Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log(x)}\right)$ Justifique.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)\log(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)^2\dfrac{\log(1+x-1)}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{x\log(x)-x+1}{(x-1)^2}$$

uma vez que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log(1+x-1)}{(x-1)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y}=1$ e sendo $f(y)=\log(1+y)$ $f'(0)=1$

aplicando a regra de Cauchy tem-se $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\log(x)-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\log(x)-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{1}{2}$

12 Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0^+}(tg(x))^{tg(2x)}$ Justifique.

$$\lim_{x\to 0^+} (tg(x))^{tg(2x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp(tg(2x)\log(tg(x))) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} tg(2x)\log(tg(x))\right)$$ ora

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{tg(x)}{x} = 1$ uma vez que $tg'(0) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{tg(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0^+} \dfrac{tg(y)}{y} = 1$

logo $\lim_{x\to 0^+} tg(2x)\log(tg(x)) = \lim_{x\to 0^+} 2x\log\left(\dfrac{tg(x)x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} 2x\left[\log\left(\dfrac{tg(x)}{x}\right) + \log(x)\right]$

$\lim_{x\to 0^+} 2x\left[\log\left(\dfrac{tg(x)}{x}\right) + \log(x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(2x\log\left(\dfrac{tg(x)}{x}\right)\right) + \lim_{x\to 0^+} 2x\log(x) = 0$ pois

$\lim_{x\to 0^+}\left(2x\log\left(\dfrac{tg(x)}{x}\right)\right) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} 2x\log(x) = 0$ por aplicação da regra de Cauchy

$\lim_{x\to 0^+} 2x\log(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{2\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2x = 0$ logo o limite pretendido é $e^0 = 1$

13 Prove que $8 + \frac{1}{9} < \sqrt{66} < 8 + \frac{1}{8}$

Para a resolução deste problema vamos usar o teorema de Lagrange assim $\sqrt{66} - \sqrt{64} = \dfrac{2}{2\sqrt{c}}$ em que $c \in]64,66[$ como $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função crescente (a derivada é positiva) tem-se que $\sqrt{64} < \sqrt{c} < \sqrt{66} < \sqrt{81}$ logo $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\sqrt{81}} < \dfrac{1}{\sqrt{c}} < \dfrac{1}{\sqrt{64}} = \dfrac{1}{8}$ e por conseguinte

$\dfrac{1}{9} + 8 < \sqrt{64} < 8 + \dfrac{1}{8}$.