# Resolução do efólio B

Álgebra Linear I **Código:** 21002

**I.** Questões de escolha múltipla.

| |
|---|
| Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo. |

**1.** Seja A uma matriz $4 \times 4$ com apenas dois valores próprios $\mu_1$ e $\mu_2$. Suponha ainda que os seus valores próprios têm multiplicidades algébricas iguais e que $\mu_1\mu_2 = 10$. Então:

☐ **a)** O polinómio característico de A pode ser $p(\mu) = (\mu - 2)(\mu - 5)$.
☐ **b)** O determinante de A é igual a 10.
☐ **c)** Qualquer dos espaços próprios de A tem dimensão 1.
☒ **d)** Os valores próprios de A podem ter multiplicidades geométricas diferentes.

**2.** Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^\top$. Considere a base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mathcal{B} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

A matriz $M = (T; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ que representa $T$ nesta base é:

☐ **a)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☒ **b)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

☐ **d)** $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**3.** Considere em $\mathbb{R}^3$ a seguinte sequência:

$$\mathcal{H} = \{(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\}.$$

Então:

☐ **a)** $\dim(\langle(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\rangle) = 4$.
☐ **b)** $\mathcal{H}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ **c)** $\mathcal{H}$ é uma sequência geradora linearmente independente.
☒ **d)** $\langle(-1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, \pi)\rangle = \mathbb{R}^3$.

**4.** Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $(1, x, x^2, x^3)$ e a aplicação linear de $\mathbb{R}_3[x]$ em $\mathbb{R}_3[x]$ definida por $g(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$. Nessa base tem-se:

☐ **a)** $\operatorname{Nuc} g = \mathbb{R}_3[x]$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ **b)** $\operatorname{Nuc} g = \{0\}$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ **c)** $\operatorname{Nuc} g = \varnothing$ e $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}_3[x]$.
☒ **d)** $\dim(\operatorname{Nuc} g) = 3$ e $\dim(\operatorname{Im} g) = 1$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

**II.** Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{M} = ((-1,0,1),(0,1,1),(1,-1,0))$ e uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

quando se considera no espaço de partida a base $\mathcal{M}$ e no espaço de chegada a base canónica.

Determine a matriz que representa $T$ quando se considera no espaço de partida a base canónica e no espaço de chegada a base canónica.

**III.** Considere a transformação linear $S : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$S(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $\mathcal{P} = (x^3, x^2, x, 1)$ e em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a base

$$\mathcal{N} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

**a)** Determine a matriz A que representa $S$ em relação às bases $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$.

**b)** Calcule os valores próprios de A.

**c)** Calcule os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

**d)** Determine a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica dos valores próprios de A.

**e)** Determine em $\mathbb{R}_3[x]$, se possível, uma base constituida por vetores próprios.

**IV.** Considere uma aplicação linear $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Será possível que $\ell$ satisfaça $\operatorname{Nuc} \ell = \operatorname{Im} \ell$?

Em caso afirmativo dê um exemplo.

**V.** **a)** Seja A uma matriz $2 \times 2$ com característica 1. Sabendo que existe um vetor não nulo $u$, tal que $Au + 4u = 0$, determine o polinómio característico de A.

**b)** Dê um exemplo de uma matriz A não triangular satisfazendo as condições da alínea **a)**.

FIM

**Grupo I.**
**1.** Tendo em conta as hipóteses não temos nehuma informação sobre os valores próprios em si, apenas sobre o seu produto. Como os valores próprios têm a mesma multiplicidade algébrica, concluimos que têm multiplicidade algébrica igual a 2. Assim o polinómio característico é $p(\mu) = (\mu - \mu_1)^2(\mu - \mu_2)^2$ e o determinate é $(\mu_1\mu_2)^2 = 100$. Os espaços próprios associados a cada valor próprio podem ter a mesma dimensão, ou podem ter dimensões diferentes, mas as hipóteses não são suficientes para afirmar nenhuma dessas possibiblidades.
Assim, a alínea certa é a alínea d).

**2.** Como as 3 primeiras matrizes da base $\mathcal{B}$ são simétricas, calculando a sua imagem obtemos a própria matriz pelo que as 3 primeiras colunas de $M$ são $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Por exclusão de partes, a alínea certa só pode ser a alínea b). Calculando a imagem da matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ podemos confirmar que $T\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = 2\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + 1\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) - 1\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

**3.** Como estamos num espaço de dimensão 3, $\mathbb{R}^3$, sabemos que qualquer sequência gera um espaço de dimensão menor ou igual a 3. Além disso uma sequência linearmente independente tem no máximo 3 elementos. Estas observações permitem eliminar logo as 3 primeiras alíneas. Assim, a alínea certa é a alínea d).

**4.** Uma vez que a aplicação $g$ transforma qualquer polinómio numa constante, a $\operatorname{Im} g$ terá dimensão 1, o que permite eliminar logo as 3 primeiras alíneas. Usando o Teorema da dimensão podemos concluir que a alínea certa é a alínea d).
**Grupo V.**
**a)** Se $A$ tem característica 1, então o seu determinante é nulo e portanto 0 é valor próprio de $A$. Por outro lado, se existe um vetor não nulo $u$ tal que $Au = -4u$, então $-4$ também é valor próprio de $A$. Como $A$ é uma matriz $2 \times 2$ tem no máximo 2 valores próprios, e o seu polinómio característico $p(x)$ tem os fatores $x$ e $x - (-4) = x + 4$. Temos portanto 2 possibilidades, $p(x) = x(x + 4)$ ou $p(x) = -x(x + 4)$. A proposição 6.16 da 2ª/3ª edição diz-nos que numa matriz $n \times n$ o coeficiente de $x^n$ é igual a $(-1)^n$, e portanto neste caso é igual a $(-1)^2 = 1$, logo o polonómio característico é $p(x) = x(x + 4)$.

**b)** Como $A$ tem característica 1 e é uma matriz $2 \times 2$ então as linhas (e as colunas) são linearmente dependentes, ou seja, a 2ª linha é um múltiplo da primeira, e escolhendo por exemplo o elemento $a_{11} = 1$ e dada a 1ª coluna $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ b \end{smallmatrix}\right]$ com $b \neq 0$, e a 2ª coluna $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha b \end{smallmatrix}\right]$ com $\alpha \neq 0$, então a matriz será da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ b & \alpha b \end{bmatrix}.$$

Não temos nenhuma garantia que exista solução para $a = 1$, mas como não queremos obter todas as soluções, é mais fácil começar com um caso simples, do que tentar o caso mais geral.

Sabendo que uma matriz é sempre raiz do seu polinómio característico, terá de ser $p(A) = A(A + 4I_2) = 0$, ou seja

$$A(A+4I_2) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ b & \alpha b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & \alpha \\ b & \alpha b + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \alpha b & \alpha(5 + \alpha b) \\ b(5 + \alpha b) & \alpha b(5 + \alpha b) \end{bmatrix} = (5+\alpha b) \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ b & \alpha b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Facilmente se conclui que existe solução se e sómente se $5 + \alpha b = 0$, e portanto dado $b \neq 0$ basta escolher $\alpha = -5/b$ a que corresponde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5/b \\ b & -5 \end{bmatrix},$$

e um vetor próprio $u$ associado ao valor próprio 4 é $u = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ b \end{smallmatrix}\right]$.

**II.**

Chamando $A$ à matriz fornecida, que representa a aplicação linear $T$ quando se considera no espaço de partida a base $\mathcal{M}$ e no espaço de chegada a $\text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}$:

$$A = \boldsymbol{M}\left(T;\, \mathcal{M},\, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $T$ é uma aplicação linear, existe uma matriz $Q$ (segundo a proposição 5.42) tal que:

$$AQ = \boldsymbol{M}\left(T;\, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^2}\right) \text{ com } Q = \boldsymbol{M}\left(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3},\, \mathcal{M}\right)$$

Calculando $Q$:

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,-1,0)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) = (1,0,0) = -\frac{1}{2}(-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) = (0,1,0) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,-1,0)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) = (0,1,0) = -\frac{1}{2}(-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) + -\frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) = (0,0,1) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,-1,0)$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) = (0,0,1) = \frac{1}{2}(-1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0), \text{ logo}$$

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } AQ:$$

$$AQ=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1+2+1 & -1+2-1 & 1+2+1 \\ 0+1+1 & 0+1-1 & 0+1+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelo que a matriz que representa $T$ quando se considera no espaço de partida a b.c.$_{\mathbb{R}^3}$ e no espaço de chegada b.c.$_{\mathbb{R}^2}$ é $AQ=\boldsymbol{M}\left(T;\text{ b.c.}_{\mathbb{R}^3},\text{ b.c.}_{\mathbb{R}^2}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**III.**

**a)**

Em relação à base $\mathcal{P}$, a sequência de coordenadas de:

$$x^3=1x^3+0x^2+0x+0\times 1 \text{ é } (1,0,0,0)\,,$$

$$x^2=0x^3+1x^2+0x+0\times 1 \text{ é } (0,1,0,0)\,,$$

$$x=0x^3+0x^2+1x+0\times 1 \text{ é } (0,0,1,0)\,,$$

$$1=0x^3+0x^2+0x+1\times 1 \text{ é } (0,0,0,1) \text{ e}$$

$$S(1,0,0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(0,1,0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(0,0,1,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(0,0,0,1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ pelo que}$$

$$A=\mathcal{M}\left(S;\,\mathcal{P},\,\mathcal{N}\right)=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

**b)**

Se $\alpha$ é valor próprio de $A$, então $|A-\alpha I_4|=0$:

$$\begin{vmatrix}-\alpha&0&0&1\\0&-\alpha&1&0\\0&1&-\alpha&0\\1&0&0&-\alpha\end{vmatrix}\underset{\ell_1}{\overset{Lapl.}{=}}\left(-\alpha\right)\left(-1\right)^{1+1}\begin{vmatrix}-\alpha&1&0\\1&-\alpha&0\\0&0&-\alpha\end{vmatrix}+1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&-\alpha&1\\0&1&-\alpha\\1&0&0\end{vmatrix}\underset{\ell_3}{\overset{Lapl.}{=}}$$

$$\left(-\alpha\right)\left(-\alpha\right)\left(-1\right)^{3+3}\begin{vmatrix}-\alpha&1\\1&-\alpha\end{vmatrix}+\left(-1\right)\left(1\right)\left(-1\right)^{3+1}\begin{vmatrix}-\alpha&1\\1&-\alpha\end{vmatrix}=$$

$$\alpha^2\left(\alpha^2-1\right)+\left(-1\right)\left(\alpha^2-1\right)=\alpha^4-2\alpha^2+1=\left(\alpha-1\right)^2\left(\alpha+1\right)^2$$

$$\left(\alpha-1\right)^2=0\vee\left(\alpha+1\right)^2=0$$

$$\alpha=1\ \vee\ \alpha=1\ \vee\ \alpha=-1\ \vee\alpha=-1$$

pelo que $A$ tem os valores próprios $-1$ e $1$.

**c)**

O subespaço próprio de $A$ associado a um valor próprio $\alpha$ é $E_\alpha=\{X\in\mathcal{M}_{4\times1}\left(\mathbb{R}\right):\ \left(A-\alpha I_n\right)X=0\}$, pelo que o subespaço próprio de $A$ associado ao valor próprio 1 é $E_1=\{X\in\mathcal{M}_{4\times1}\left(\mathbb{R}\right):\ \left(A-1I_4\right)X=0\}$ :

$$\left[\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\1&0&0&-1&0\end{array}\right]\underset{\substack{\ell_3+\ell_2\\ \ell_4+\ell_1}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\underset{\substack{-1\ell_1\\ -1\ell_2}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right](f.e.r.)$$

$$E_1=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{4\times1}\left(\mathbb{R}\right):\ a=d\ \wedge\ b=c\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\b\\a\end{bmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$\left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}:a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

pelo que os vetores próprios de $A$ associados ao valor próprio 1 são da forma: $a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ e $b\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ é uma sequência geradora de $E_1$.

Como a sequência $\left( \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente$\left(\text{pois } \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix} \ (f.e.r.)\right)$, é uma base de $E_1$.

O subespaço próprio de $A$ associado ao valor próprio $-1$ é $E_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}) : (A-(-1)\,I_4)\,X = 0\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right] \underset{\substack{\ell_3-\ell_2\\ \ell_4-\ell_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right] (f.e.r.)$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times1}(\mathbb{R}) : \ a=-d \ \wedge \ b=-c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}-d\\-c\\c\\d\end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\left\{ d\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

pelo que os vetores próprios de $A$ associados ao valor próprio $-1$ são da forma: $d\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ e $c\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ com $c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $\left\langle \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ é uma sequência geradora de $E_{-1}$ .

Como a sequência $\left( \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente $\left(\text{pois } \begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\end{bmatrix} \ (f.e.)\right)$, é uma base de $E_{-1}$

**d)**

Pela definição de multiplicidade algébrica de um valor próprio, esta é a multiplicidade de cada raiz do polinómio característico. Pela alínea b), facilmente se verifica que o polinómio característico de $A$ é $p(x) = |A - xI_4| = (x-1)^2(x+1)^2$ e, consequentemente $\operatorname{ma}(-1) = 2$ e $\operatorname{ma}(1) = 2$.

Como na alínea c) já foram calculadas as bases dos subespaços próprios de $A$ associados aos valores próprios $-1$ e $1$, vem

$$\dim E_{-1} = \operatorname{mg}(-1) = 2 \ \text{ e } \ \dim E_1 = \operatorname{mg}(1) = 2$$

**e)**

Qualquer sequência linearmente independente com 4 vetores (pois $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$) de $\mathbb{R}_3[x]$ é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Como os vetores próprios associados a valores próprios diferentes de $A$ são linearmente independentes, considerando os vetores próprios de $A$ calculados na alínea c) $\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ que eram as bases dos respetivos subespaços próprios e, portanto, linearmente independentes entre si, temos, por exemplo, a base $\mathcal{B} = \left(-x^3+1,\ -x^2+x,\ x^3+1,\ x^2+x\right)$ que é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$ nas condições pretendidas.

## IV.

A resposta é afirmativa.

Pelo teorema da dimensão sabemos que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Nuc} \ell + \dim \operatorname{Im} \ell$ e, portanto, $\dim \operatorname{Nuc} \ell = \dim \operatorname{Im} \ell = 1$. Para que satisfaça a condição de $\operatorname{Nuc} \ell = \operatorname{Im} \ell$, a sequência geradora do $\operatorname{Nuc} \ell$ deve gerar também $\operatorname{Im} \ell$.

Uma aplicação $\ell$ que satisfaz a condição $\operatorname{Nuc} \ell = \operatorname{Im} \ell$ é, por exemplo, $\ell : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\ell(x,y) = (0,x) \text{ em que}$$

$$\operatorname{Nuc} \ell = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ell(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}\right\}$$

$$\operatorname{Nuc} \ell = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (0,x) = (0,0)\right\}$$

$$\operatorname{Nuc} \ell = \{(0,y) : \ y \in \mathbb{R}\} = \{y(0,1) : \ y \in \mathbb{R}\}$$

Pelo que se conclui que uma sequência geradora de $\operatorname{Nuc} \ell$ é $\langle (0,1) \rangle$. Calculando agora a $\operatorname{Im} \ell$ :

$$\operatorname{Im} \ell = \left\{\ell(x,y) : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$\operatorname{Im} \ell = \{(0,x) : \ x \in \mathbb{R}\} = \{x(0,1) : \ x \in \mathbb{R}\}$$

logo, uma sequência geradora de $\operatorname{Im} \ell$ é $\langle (0,1) \rangle$. Duas sequências geradoras geram o mesmo espaço se, e só se são iguais as suas linhas não nulas na sua forma de matriz em escada reduzida:

$$\operatorname{Nuc}\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ (f.e.r.) \text{ e } \operatorname{Im}\ell = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \ (f.e.r)$$

Pelo que se conclui que $\operatorname{Nuc}\ell = \operatorname{Im}\ell$, e logo $\ell$ é uma aplicação nas condições pretendidas.