ÁLGEBRA LINEAR I | e-fólio A 2023 | resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio. Não se destina a estudo ou revisão (em vez disso, use as resoluções das atividades formativas).

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nos e-fólios.

I. (*0.5 val.*) Questões de escolha múltipla.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** AB não é definido ☐ **c)** $(BC)^2$ é invertível

☐ **b)** AC é definido ☐ **d)** CB é invertível

Resolução: d.

a. é falso: $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$, pois AB é definido $(2 = 2)$

b. é falso: $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, pois AC não é definido $(2 \neq 1)$.

c. é falso: $\det(BC)^2 = (\det BC)^2 = \det\left(\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^2 = 0^2 = 0$, portanto $(BC)^2$ não é invertível.

d. é verdadeiro: $CB = [1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1] = [-1]$, portanto $\det(CB) = -1 \neq 0$, e CB é invertível.

2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tais que $\det A = 3$, e $\det(B + C) = i$.

Então, para todas as opções possíveis de A, B e C, temos que:

☐ **a)** $\det(A + B + C) = 3 + i$ ☐ **c)** $\det(A^2BC) = 9i$

☐ **b)** $\det\left(-A(B + C)^{-1}\right) = 3i$ ☐ **d)** $\det\left(-(B + C)A^{-1}\right) = \frac{i}{3}$

Resolução: d.

a. é errado: Se $A = \text{diag}(3,1,1,1)$, $B = \text{diag}(1,1,1,i)$, e $C = 0_{4\times 4}$, então $\det(A+B+C) = \det(\text{diag}(4,2,2,1+i)) = 16+16i \neq 3+i$.

b. é errado: temos $\det\left(-A(B+C)^{-1}\right) = \det(-A)\det((B+C)^{-1}) = (-1)^4\det(A)(\det(B+C))^{-1} = 1\cdot 3\cdot(-i) = -3i \neq 3i$

(Observação: $(B+C)^{-1}$ existe, pois $\det(B+C)\neq 0$)

c. é errado: Se $A = \text{diag}(3,1,1,1)$, $B = \text{diag}(1,1,1,i)$, e $C = 0_{4\times 4}$, então $\det(A^2BC) = \det(0_{4\times 4}) = 0$.

d. é verdadeiro: temos $\det\left(-(B+C)A^{-1}\right) = \det(-(B+C))\det(A^{-1}) = (-1)^4\det(B+C)(\det A)^{-1} = 1\cdot i\cdot\frac{1}{3} = \frac{i}{3}$

(Observação: A^{-1} existe, pois $\det A \neq 0$)

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*1.0 val.*)

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ r_3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

em que r_3 consiste nos três últimos dígitos do seu número de estudante (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r_3 = 123$).

a. Determine justificadamente $\det A$.

b. A equação $AX = b$ tem uma solução única $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Determine justificadamente o valor do x_4.

Resolução:

a. Com a teorema de Laplace, temos

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = (-1)1\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + 1(-1)\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -1\cdot 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} - 1\cdot 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -5 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -5(-1)1 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 5(3(-2) - 1 \cdot 1) = -35$$

b. De acordo come a Regra de Cramer, temos $x_4 = \frac{\det A_{(4)}}{\det A} = \frac{\det A_{(4)}}{-35}$, onde

$$A_{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & r_3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Temos $\det A_{(4)} = 25r_3 - 95$ (a justificação depende de r_3 e é omitida), portanto, $x_4 = \frac{\det A_{(4)}}{-35} = -\frac{5}{7}r_3 + \frac{19}{7}$.

III. (*0.9 val.*)

Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ -ax - 2y - az = -3 \\ 2y + 2az = 2c. \end{cases} \tag{1}$$

onde $a, c \in \mathbb{R}$. Determine para quais combinações de a e c o sistema (1) não tem solução, tem uma solução única ou tem infinitas soluções.

Resolução: Seja $A = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ -a & -2 & -a \\ 0 & 2 & 2a \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2c \end{bmatrix}$.

O sistema (1) corresponde à equação $Ax = b$. $[A|b]$ é equivalente por linhas a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & c \\ 0 & 0 & (1-c)a & -c^2 + 2c - 2 \end{array}\right]$$

(detalhes omitidos).

Para cada $c \in \mathbb{R}$ temos $-c^2 + 2c - 2 = -(c-1)^2 - 1 \leq -1 < 0$.

Portanto, se $a = 0$ (com c arbitrário) ou $c = 1$ (com a arbitrário), então o sistema não tem solução, pois a última linha implica $0 = -c^2 + 2c - 2$, o que é impossível.

Se $a \neq 0$ e $c \neq 1$, então $r(A) = 3 = r([A|b])$, o sistema tem uma solução unica.

O sistema nunca tem infinitas soluções.

IV. (*0.7 val.*)

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Encontrar todas as matrizes em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ que comutam com A.

Resolução: Temos de resolver a equação matricial $AX = XA$ para $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

Seja

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix},$$

então a equação torna-se

$$\begin{bmatrix} a+di & b+ei & c+fi \\ -ai-d & -bi-e & -ci-f \\ 3g & 3h & 3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-bi & ai-b & 3c \\ d-ei & di-e & 3f \\ g-hi & gi-h & 3j \end{bmatrix} \tag{2}$$

(detalhes omitidas) Temos

pos(1,3): $c + fi = 3c \Rightarrow f = -2ic$

pos(2,3): $-ci - f = 3f \Rightarrow f = -\frac{i}{2}c$

Em conjunto, as duas últimas equações implicam que $c = f = 0$. Do mesmo modo, obtemos que $g = h = 0$.

pos(1,1): $a + di = a - bi \Rightarrow d = -b$

pos(1,2): $b + ei = ai - b \Rightarrow b = \frac{i}{2}(a - e)$

As substituições $c = f = g = h = 0$, $b = \frac{i}{2}(a-e)$, $d = \frac{i}{2}(e-a)$ na equação (2) resultam em

$$\begin{bmatrix} \frac{3a}{2} - \frac{e}{2} & \frac{i}{2}(a+e) & 0 \\ \frac{i}{2}(-e-a) & \frac{a}{2} - \frac{3e}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a}{2} - \frac{e}{2} & \frac{i}{2}(a+e) & 0 \\ \frac{i}{2}(-e-a) & \frac{a}{2} - \frac{3e}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3j \end{bmatrix}$$

Assim, as condições derivadas já são suficientes para a comutatividade. Segue-se que A comuta com todas as matrizes em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ da forma

$$\begin{bmatrix} a & \frac{i}{2}(a-e) & 0 \\ \frac{i}{2}(e-a) & e & 0 \\ 0 & 0 & j \end{bmatrix},$$

em que a, e, j são números complexos arbitrários.

V. (*0.9 val.*) Sejam $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & * & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & * & * & * \\ a_n & * & \cdots & * & * & * \end{bmatrix}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e os $*$ representam também valores arbitrários de $\mathbb{R}$, que podem ou não ser distintos.

Mostre que $\det A = \pm a_1 a_2 \cdots a_n$, e descreva como escolher o $\pm$ nesta expressão (dica: isto só depende de n).

Resolução: Seja $A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz obtida a partir de A trocando a linha 1 pela linha n, a linha 2 pela linha $n-1$, a linha 3 pela linha $n-2$, etc., até obtermos uma matriz A' da forma

$$A' = \begin{bmatrix} a_n & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & a_{n-1} & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix}.$$

A matrix A' é triangular superior, e pois $\det A' = a_n a_{n-1} \cdots a_1 = a_1 a_2 \cdots a_n$. Como a troca de linhas apenas altera o sinal do determinante, obtemos $\det A = \pm a_1 a_2 \cdots a_n$.

Para descobrir o sinal em termos de n, precisamos de contar o número de trocas de linhas. Se n for par, trocamos $\frac{n}{2}$ vezes, se n for ímpar, trocamos $\frac{n-1}{2}$ vezes (a linha do meio mantém-se no lugar).

Portanto, a sinal é $+$ se

i. n e $\frac{n}{2}$ são pares ($n = 4m$ para algum $m \in \mathbb{Z}$)

ii. n é ímpar e $\frac{n-1}{2}$ é par ($n = 4m + 1$ para algum $m \in \mathbb{Z}$)

a sinal é $-$ se

i. n e $\frac{n-1}{2}$ são ímpares ($n = 4m + 3$ para algum $m \in \mathbb{Z}$)

ii. n é par e $\frac{n}{2}$ é ímpar ($n = 4m + 2$ para algum $m \in \mathbb{Z}$)

Fim