Curso de Qualificação para Estudos Superiores - CQES Matemática | 71061 - Resolução

Enunciado

1. (1 valor) Considere uma progressão geométrica $u_1, u_2, u_3, \ldots$ em que se sabe que $u_6 = -9\sqrt{3}$ e que a razão da progressão é 9.

(a) Determine o primeiro termo (u_1) da progressão geométrica.

Resolução: Sabemos que numa progressão geométrica se tem que $u_n = u_1 r^{n-1}$. Assim, $u_6 = u_1 r^{6-1}$. Dado que $u_6 = -9\sqrt{3}$ e $r = 9$ temos que $-9\sqrt{3} = u_1 9^5$. De onde se conclui que $u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9^4} = -\frac{\sqrt{3}}{6561} \approx -0,00026$.

(b) Determine o termo geral da progressão geométrica.

Resolução: O termo geral de uma progressão geométrica é dado por $u_n = u_1 r^{n-1}$. Aplicando a alínea anterior, obtemos $u_n = \frac{-\sqrt{3}}{9^4} 9^{n-1} = -\sqrt{3} \times 9^{n-5}$.

(c) Sendo S_{10} a soma dos primeiros 10 termos da progressão geométrica, calcule $8 \times 9^4 \times 3^{-\frac{1}{2}} S_{10}$.

Resolução: Sabemos que $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$. Logo $S_{10} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{9^4}(1-9^{10})}{1-9}$. Assim, a expressão do enunciado é $8 \times 9^4 \times 3^{-\frac{1}{2}} S_{10} = 8 \times 9^4 \times 3^{-\frac{1}{2}} \frac{-\frac{\sqrt{3}}{9^4}(1-9^{10})}{-8} = \frac{9^4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{9^4}(1-9^{10}) = 1 - 9^{10} \approx -3486784400$.

2. (1 valor) Determine os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

Resolução: Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Levantemos a indeterminação.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}} == \lim_{x \to -\infty} -\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$

Resolução: Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Levantemos a indeterminação.

$\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = \lim_{y\to 0} e.\dfrac{e^y-1}{y} = e \lim_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = e.$

Note que acima fizemos a mudança de variável $y = x - 1$.

3. (1 valor) Considere f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+3) & se\ x \geq -2 \\ \\ x^2+3x+2 & se\ x < -2 \end{cases}$$

.

(onde $\ln$ é o logaritmo na base e)

(a) Determine, caso existam, os zeros da função f. Justifique.

Resolução: Para $x \geq -2$, a função f toma o valor zero quando $\ln(x+3) = 0$, ou seja, quando $x + 3 = 1$, isto é $x = -2$. Assim encontrámos um zero da função f, o -2. Para $x < -2$, a função f toma o valor zero quando $x^2 + 3x + 2 = 0$. Logo procuramos a(s) solução(ões) de $x^2 + 3x + 2 = 0 \wedge x < -2$. Aplicando a fórmula resolvente temos que $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4(2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$. Assim temos que $x^2 + 3x + 2 = 0 \wedge x < -2 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = -2) \wedge x < -2$ o que é uma condição impossível. Ou seja o segundo ramo da função não tem zeros.

Concluímos assim que -2 é o único zero da função.

(b) Indique, justificando, se a função f é contínua em $x = -2$.

Resolução: A função é contínua em $x = -2$ se e somente se $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = f(-2)$. Como $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \ln(x+3) = \ln 1 = 0$; $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} x^2 + 3x + 2 = 0$ e $f(-2) = \ln(-2+3) = \ln(1) = 0$, temos que a função é contínua em $x = -2$.

(c) A função f é injetiva? Justifique a sua resposta.

Resolução: A função f não é injetiva. Pensemos por exemplo nos elementos do domínio -3 e $e^2 - 3 \approx 4.38$. Temos que $-3 \neq e^2 - 3$ mas vejamos que $f(-3) = f(e^2 - 3)$.

Ora $f(-3) = 9 - 9 + 2 = 2$ e $f(e^2 - 3) = \ln(e^2 - 3 + 3) = \ln(e^2) = 2$.

Como existem dois elementos distintos com a mesma imagem, concluímos que a função não é injetiva.

4. **(1 valor)** Aplicando as regras de derivação, calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $g(x) = \dfrac{sen\ x}{3 + cos\ x}$

Resolução: $g'(x) = (\frac{sen\ x}{3+cos\ x})' = \frac{sen'x\ (3+\cos x) - senx\ (3+cos\ x)'}{(3+cos\ x)^2} = \frac{cosx\ (3+cos\ x) - senx\ (-sen\ x)}{(3+cos\ x)^2} = \frac{3cosx + cos^2 x + sen^2 x}{(3+cos\ x)^2} = \frac{1+3cosx}{(3+cos\ x)^2}$.

(b) $h(x) = 10\sqrt[3]{x^4} + \ln(x^4 + 1)$

Resolução: $h'(x) = (10\sqrt[3]{x^4} + \ln(x^4+1))' = (10x^{\frac{4}{3}})' + (\ln(x^4 + 1))' = \frac{40}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + \frac{(x^4+1)'}{x^4+1} = \frac{40}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4x^3}{x^4+1} = \frac{40}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{4x^3}{x^4+1}$.

FIM