Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 13 a 20 de maio de 2019

Data de Limite de Entrega

20 de maio de 2019, até às 12h00 de Portugal Continental

Temas

Tópico 3 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,5 valores

2. 0,5 valores

Total: 2,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Considere a função $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $\Phi(x, y) = ye^{xy} + x$.

a) Mostre que a equação $\Phi(x, y) = 1$ define implicitamente y como sendo uma função φ da variável x, numa vizinhança do ponto $(x, y) = (0, 1)$.

b) Justifique que a função φ referida na alínea anterior é de classe C^1 e calcule a equação da reta tangente à curva de nível $\Phi = 1$ em $(0, 1)$.

c) Usando uma versão C^k do teorema da função implícita[1] determine o polinómio de Taylor de segunda ordem de φ em $x = 0$.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u = y^2 + z^2 \\ v = x^2 + z^2 \\ w = x^2 + y^2. \end{cases} \tag{1}$$

Justificando cuidadosamente, determine se (ou em que casos) é possível resolver (1) para obter (x, y, z) como função de (u, v, w).

FIM

[1] Esta versão é análoga à versão estudada no texto base desta UC afirmando adicionalmente que se $\Phi \in C^k$ então também $\varphi \in C^k$.

RESOLUÇÃO

1.a) A função Φ está definida em todo o espaço $\mathbb{R}^2$, que é um aberto, e é aí de classe $C^\infty \subset C^1$. Como

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \left(e^{xy} + xye^{xy}\right)\Big|_{(0,1)} = 1 \neq 0,$$

o teorema da função implícita garante-nos que, numa vizinhança suficientemente pequena de $(0,1)$, a equação $\Phi(x,y)-1=0$ define implicitamente uma função $y=\varphi(x)$, com $\varphi(0)=1$ e tal que, para uma x numa vizinhança suficientemente pequena de 0, $y=\varphi(x) \Leftrightarrow \Phi(x,y)=1$.

1.b) Pelo teorema da função implícita, se Φ é de classe C^1, então φ é também de classe C^1. Portanto, pode-se usar a regra da cadeia para escrever

$$\begin{aligned}
\Phi(x,\varphi(x)) - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad D_1\Phi(x,\varphi(x)) + D_2\Phi(x,\varphi(x))\varphi'(x) - 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi(x)^2 e^{x\varphi(x)} + 1 + \left(e^{x\varphi(x)} + x\varphi(x)e^{x\varphi(x)}\right)\varphi'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)^2 e^{x\varphi(x)} + 1}{e^{x\varphi(x)}(1 + x\varphi(x))},
\end{aligned}$$

e como $\varphi(0) = 1$, conclui-se que $\varphi'(0) = -\frac{2}{1} = -2$. Consequentemente, como a reta tangente à curva de nível $\Phi = 1$ em $(0,1)$ é tangente ao gráfico de φ em $x = 0$, tem-se que a equação pretendida é

$$y - 1 = -2(x-0) \Longleftrightarrow y = 1 - 2x.$$

1.c) Caso $\Phi \in C^k$, então também $\varphi \in C^k$ (por uma versão C^k do teorema da função implícita). Neste caso, como a função dada é $C^\infty \subset C^2$, sabemos que $\varphi \in C^2$ e, portanto, podemos calcular o seu polinómio de Taylor de segunda ordem em $x=0$. Aplicando, mais uma vez, a regra da cadeia à identidade $\Phi(x,\varphi(x)) - 1 = 0$ obtemos uma expressão que envolve a segunda derivada $\varphi''(x)$, que podemos utilizar para obter o valor de $\varphi''(0)$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,\varphi(x)) - 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\Phi(x,\varphi(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(D_1\Phi(x,\varphi(x)) + D_2\Phi(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\varphi(x)^2 e^{x\varphi(x)} + 1 + \left(e^{x\varphi(x)} + x\varphi(x)e^{x\varphi(x)}\right)\varphi'(x)\Big) = 0
\end{aligned}$$

Agora calculando esta derivada e substituindo no resultado desse cálculo $x = 0, \varphi(0) = 1$ e $\varphi'(0) = -2$ conclui-se que $-4+1+\varphi''(0)+-2 = 0$, ou seja $\varphi''(0) = -7$, peo que o polinómio de Taylor pretendido é

$$P_2(x) = 1 - 2x - \frac{7}{2}x^2.$$

2. O sistema dado pode ser escrito como $(u, v, w) = \mathbf{F}(x, y, z)$ onde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, com F_j os polinómios que estão no membro direito de (1). Esta função está definida e é de classe C^1 em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ (que é um conjunto aberto). Observa-se que a matriz jacobiana de $\mathbf{F}$ num ponto (x, y, z) é

$$D\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix},$$

e portanto o determinante é[2] $\det D\mathbf{F} = 16xyz$. Consequentemente, o teorema da função inversa é aplicável para concluirmos que é possível resolver (1) para obter (x, y, z) como função de (u, v, w) em vizinhanças de todos os pontos para os quais $xyz \neq 0$, ou seja, em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ *exceto* aqueles pontos que são parte dos planos coordenados.

[2] Isto conclui-se facilmente, por exemplo expandindo o determinante ao longo da primeira linha.