**QUESTÃO 1** (5 valores) (1.1 = 1.0; 1.2 =4.0)

Recorra ao algoritmo *scan-line* para <u>calcular as coordenadas dos *pixels*</u> de preenchimento da área bidimensional definida pelo polígono constituído pelos vértices $A(4,1)$, $B(7,4)$, $C(7,7)$, $D(4,7)$ e $E(1,4)$

**1.1.** Apresente o <u>estado da tabela de arestas</u> (ET - *Edge Table*) e <u>tabela de arestas activas</u> (AET - *Active Edge Table*) no início do algoritmo.

**1.2.** Calcule as coordenadas dos pixels de preenchimento, <u>apresentando cada iteração do algoritmo separadamente,</u> indicando o estado da ET e AET, e apresente no final, de forma gráfica, o preenchimento.

R:

1.1.)

Antes de iniciar as iterações do algoritmo é necessário obter para cada aresta do polígono que vai ser preenchido, um conjunto de elementos informativos sobre os mesmos, tais como: declive $m$ e $\frac{1}{m}$, $x_{mínimo}$, $y_{mínimo}$ e $y_{máximo}$ por forma a podermos construir as tabelas ET e AET.

Nota: $x_{mínimo}$ é a coordenada que acompanha $y_{mínimo}$.

Para cada aresta do polígono, vista como segmento de reta, obtemos os valores de $m = \frac{dy}{dx}$ tendo em conta que cada aresta $\overline{A_1A_2}$ é obtida através dos pontos sucessivos do polígono ligando o último ponto ao primeiro.

Temos assim:

$$\overline{AB} = [(4,1),(7,4)]: m = \frac{4-1}{7-4} = \frac{3}{3}; \frac{1}{m} = 1; y_{min} = 1; x_{min} = 4;\ y_{máx} = 4;$$

$$\overline{BC} = [(7,4),(7,7)]: m = \frac{7-4}{7-7} = \frac{1}{0} = \infty; \frac{1}{m} = 0; y_{min} = 4; x_{min} = 7;\ y_{máx} = 7;$$

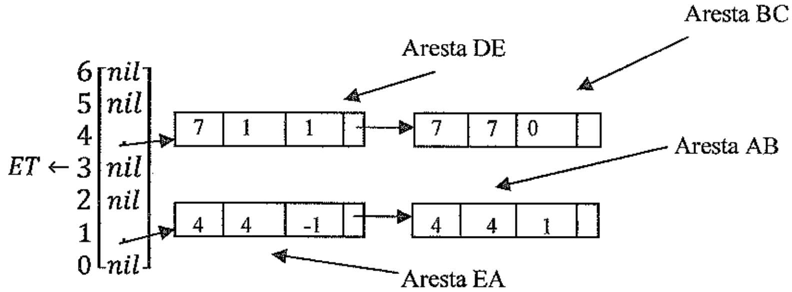
$$\overline{CD} = [(7,7),(4,7)]: m = \frac{7-7}{4-7} = \frac{0}{-3} = 0; \frac{1}{m} = \infty \quad \text{Segmento horizontal – logo ignora-se}$$

$$\overline{DE} = [(4,7),(1,4)]: m = \frac{4-7}{1-4} = \frac{-3}{-3} = 1; \frac{1}{m} = 1; y_{min} = 4; x_{min} = 1;\ y_{máx} = 7;$$

$$\overline{EA} = [(1,4),(4,1)]: m = \frac{1-4}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1; \frac{1}{m} = -1; y_{min} = 1; x_{min} = 4;\ y_{máx} = 4;$$

No arranque do algoritmo as tabelas ET e AET tem o seguinte estado:

$AET \leftarrow nil$



2.2)

Seja a linha de varrimento (*scan-line*) definida por *SL* sendo que o varrimento se faz na vertical, percorrendo o eixo Y desde os valores mais pequenos até à maior coordenada em Y do polígono.

$SL \leftarrow 1$ ou seja, a linha de varrimento recebe o valor do primeiro índice da entrada da tabela ET que não esteja vazia, neste caso a entrada 1, que corresponde à coordenada $y$ menor do polígono partilhada pelas arestas $\overline{AB}$ e $\overline{EA}$.

| Iteração do algoritmo |
|---|

Até que *AET* fique vazia repete

<u>Iteração 1</u>

1.1) Mover de *ET* para *AET* as arestas que passam a ser intersectadas por *SL*, ou seja, o valor de entrada com índice *SL*.
A tabela *AET* recebe então os valores da(s) aresta(s) de *ET* com entrada *SL*.

$$AET \leftarrow \overbrace{|4|4|-1|}^{\overline{EA}} \rightarrow \overbrace{|4|4|1|}^{\overline{AB}}$$

1.2) Eliminar de *AET* todas as arestas que deixam de ser intersectadas pela linha de varrimento *SL*. Basta verificar se existe alguma aresta em *AET* cujo $y_{máximo} \leq SL$

Neste caso temos $SL = 1$ e $\overline{EA}\ y_{máximo} = 4$ e $\overline{AB}\ y_{máximo} = 4$ logo $SL <$ que ambos. Não existem arestas em condições de ser eliminadas de *AET*, ficando esta tabela inalterada.

1.3) Identificar pontos a desenhar no ecrã entre pares de arestas de *AET* (estas são as intersectadas por *SL*).
A coordenada em $y$ é o valor de *SL* e temos de calcular os valores da abcissa $x$ mais à esquerda e mais à direita (daqui a importância do valor de $x_{mínimo}$ a abcissa que acompanha a ordenada do ponto de intersecção de SL com cada aresta).

Ou seja, vamos considerar os pontos entre $x_{mínimo}$ de pares de arestas em *AET*.
Neste caso, $\overline{EA}\ x_{mínimo} = 4$ e $\overline{AB}\ x_{mínimo} = 4$ logo
Pontos a ativar: (4,1)

1.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 2$

1.5) Atualizamos AET de $x_{mínimo}$ tendo em conta o incremento *SL* vem

$x_{i+1} \leftarrow x_i + \frac{1}{m}$ para qualquer aresta.

Temos então:

$\overline{EA}$: $x_{i+1} \leftarrow 4 + (-1) = 3$; $\overline{AB}$: $x_{i+1} = 4 + 1 = 5$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|4|3|-1|}^{\overline{EA'}} \rightarrow \overbrace{|4|5|1|}^{\overline{AB'}}$

Iteração 2

2.1) Existem arestas na entrada *SL (==2)* de *ET*? Não.

2.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.

2.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de *AET*.
Abcissas entre $x = 3\ (\overline{EA'}\ x_{mínimo})$ e $x = 5\ (\overline{AB'}\ x_{mínimo})$

Pontos a ativar: (3,2), (4,2), (5,2)

2.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 3$
2.5) Atualizamos AET tal que
$\overline{EA'}: x_{i+1} \leftarrow 3 + (-1) = 2;\ \overline{AB'}: x_{i+1} = 5 + 1 = 6$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|4|2|-1|}^{\overline{EA''}} \rightarrow \overbrace{|4|6|1|}^{\overline{AB''}}$

Iteração 3

3.1) Existem arestas na entrada *SL (==3)* de *ET*? Não.

3.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.

3.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de *AET*.
Abcissas entre $x = 2\ (\overline{DA''}\ x_{mínimo})$ e $x = 6\ (\overline{AB''}\ x_{mínimo})$

Pontos a ativar: (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3)

3.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 4$
3.5) Atualizamos AET tal que
$\overline{EA''}: x_{i+1} \leftarrow 2 + (-1) = 1;\ \overline{AB''}: x_{i+1} = 6 + 1 = 7$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|4|1|-1|}^{\overline{DA'''}} \rightarrow \overbrace{|4|7|1|}^{\overline{AB'''}}$

Iteração 4

4.1) Existem arestas na entrada *SL (==4)* de *ET*? Sim, as arestas $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ (passam a ser intersectadas pela linha de varrimento *SL*)
Fica $AET \leftarrow \overbrace{|4|1|-1|}^{\overline{EA'''}} \rightarrow \overbrace{|7|1|1|}^{\overline{DE}} \rightarrow \overbrace{|4|7|1|}^{\overline{AB'''}} \rightarrow \overbrace{|7|7|0|}^{\overline{BC}}$ (ordenada por $x_{min}$)

4.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Sim, as arestas $\overline{EA'''}$ e $\overline{AB'''}$ pelo que são eliminadas da tabela AET (estas arestas deixam de ser intersectadas)
Fica $AET \leftarrow \overbrace{|7|1|1|}^{\overline{DE}} \rightarrow \overbrace{|7|7|0|}^{\overline{BC}}$

4.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de *AET*.

Abcissas entre $x = 1\ (\overline{DE}\ x_{mínimo})$ e $x = 7\ (\overline{BC}\ x_{mínimo})$

Pontos a ativar: $(1{,}4), (2{,}4), (3{,}4), (4{,}4), (5{,}4), (6{,}4), (7{,}4)$

4.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 5$
4.5) Atualizamos AET tal que
$\overline{DE}: x_{i+1} \leftarrow 1 + 1 = 2;\ \overline{BC}: x_{i+1} = 7 + (0) = 7\ \ (segmento\ horizontal\ abcissa\ mantém)$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|7|2|1|}^{\overline{DE}'} \rightarrow \overbrace{|7|7|0|}^{\overline{BC}'}$

Iteração 5

5.1) Existem arestas na entrada *SL (==5)* de *ET*? Não
5.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Não

5.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de *AET*.
Abcissas entre $x = 2\ (\overline{DE}'\ x_{mínimo})$ e $x = 7\ (\overline{BC}'\ x_{mínimo})$

Pontos a ativar: $(2{,}5), (3{,}5), (4{,}5), (5{,}5), (6{,}5), (7{,}5)$

5.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 6$
5.5) Atualizamos AET tal que
$\overline{ED}': x_{i+1} \leftarrow 2 + 1 = 3;\ \overline{BC}': x_{i+1} = 7 + (0) = 7$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|7|3|1|}^{\overline{ED}''} \rightarrow \overbrace{|7|7|0|}^{\overline{BC}''}$

Iteração 6

6.1) Existem arestas na entrada *SL (==6)* de *ET*? Não.
6.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Não.

6.3) Pontos a ativar no ecrã entre pares de arestas de *AET*.
Abcissas entre $x = 3\ (\overline{ED}''\ x_{mínimo})$ e $x = 7\ (\overline{BC}''\ x_{mínimo})$

Pontos a ativar: $(3{,}6), (4{,}6), (5{,}6), (6{,}6), (7{,}6)$

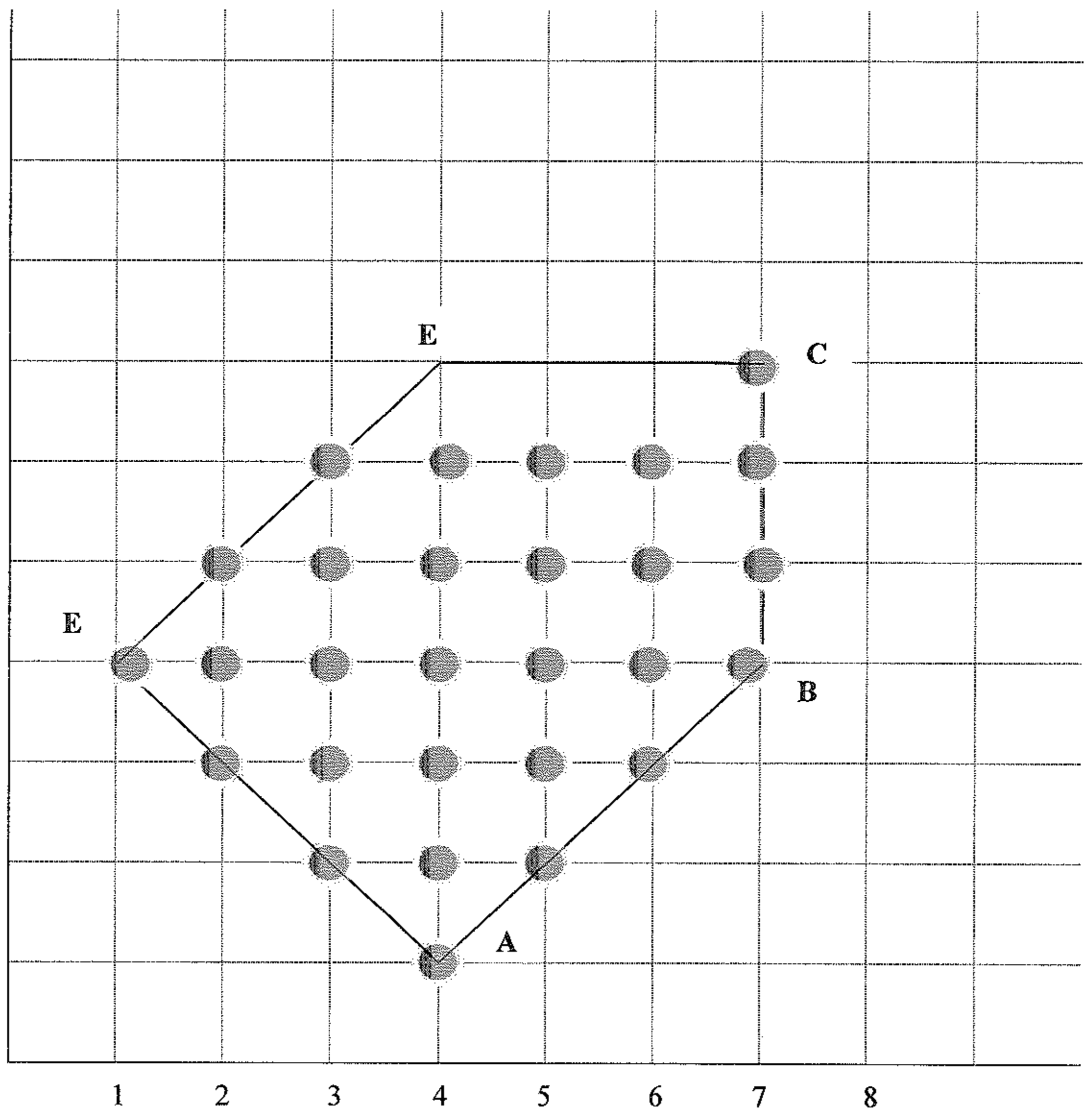
6.4) Incrementamos SL ou seja $SL \leftarrow SL + 1; SL = 7$
6.5) Atualizamos AET tal que
$\overline{ED}'': x_{i+1} \leftarrow 3 + 1 = 4;\ \overline{BC}'': x_{i+1} = 7 + (0) = 7$

Ficando $AET \leftarrow \overbrace{|7|4|1|}^{\overline{CD}'''} \rightarrow \overbrace{|7|7|0|}^{\overline{BC}'''}$

Iteração 7

7.1) Existem arestas na entrada *SL (==7)* de *ET*? Não.

7.2) Existem arestas em *AET* tal que $y_{máximos} \leq SL$ ? Sim, as arestas $\overline{BC'''}$ e $\overline{CD'''}$ (deixam de ser intersectadas pela linha de varrimento *SL*) sendo eliminadas de *AET*. Ficando $AET \leftarrow nil$ = condição para terminar o algoritmo.



**QUESTÃO 2** (2 valores)

Dada a matriz de coeficientes geométricos **B** obtenha os vetores coeficientes algébricos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ sendo que

$\boldsymbol{a} = [a_x\, a_y\, a_z]$, $\boldsymbol{b} = [b_x\, b_y\, b_z]$, $\boldsymbol{c} = [c_x\, c_y\, c_z]$, $\boldsymbol{d} = [d_x\, d_y\, d_z]$.

Apresente todos os cálculos e matrizes utilizadas.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

R:

2)

Temos que A = MB sendo que M é a Matriz de Transformação Universal.

Tendo ainda que:

$$A = [a\, b\, c\, d]^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Logo basta resolver por cálculo vetorial a expressão (sendo M conhecida):

$$A = MB = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-2-8+1) & (2+1) \\ -2 & (3+12-1) & (-3-1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -9 & 3 \\ -2 & 14 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$a = [1 \quad -9 \quad 3]$; $b = [-2 \quad 14 \quad -4]$; $c = [1 \quad 0 \quad 0]$; $d = [0 \quad -1 \quad 1]$

## QUESTÃO 3 (2 valores)

Admita que temos as seguintes funções de mistura Bézier.

$B_0 = 5u - 4$

$B_1 = 2u^2 - 4u + 3$

$B_2 = -2u^2 - u + 1$ com $u \in [0, 1]$.

Sendo os três pontos de controlo $\boldsymbol{P_0} = (1, 0, -2)$, $\boldsymbol{P_1} = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{P_2} = (-1, 0, 0)$ calcule o ponto $\boldsymbol{P} = (p_x, p_y, p_z)$ da curva Bézier em $u = 0.75$

R:

3)

Vamos recorrer ao cálculo matricial referente a Bézier de grau 2 (quadráticas), que são controladas por 3 pontos, tal que:

$p(u) = UMP$ em que $U = [u^2 \quad u \quad 1]$ ; $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = [P_0 \, P_1 \, P_2]^T$

Assim vem que:

$$p(u) = [u^2 \quad u \quad 1].\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = [u^2 \quad u \quad 1].\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se substituirmos por $u = 0.75$ vem:

Veja-se que esta expressão permite obter qualquer ponto da curva com $u \in [0,1]$. Seja u = 0.5 $= \frac{1}{2}$

$$p\left(u = \frac{1}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \frac{1}{2} \quad 1\right].\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad 1\right].\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -14 \\ -2 & 3 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$\left[\left(\left(\frac{1}{4}\right) * 4 + \left(\frac{1}{2}\right) * 2 - 2\right), \left(\left(\frac{1}{4}\right) * 2 - \left(\frac{1}{2}\right) * 4 + 3\right), \left(\left(\frac{1}{4}\right) * 2 - \left(\frac{1}{2}\right) * 14 + 11\right)\right]$$

$=$

$$\left[0, \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}\right)\right]$$

## QUESTÃO 4 (2 valores)

Descreva sucintamente as principais diferenças entre uma superfície gerada por uma grelha de curvas B-Spline e outra gerada por curvas Bézier.

R:

4)

Uma superfície gerada por uma grelha de curvas B-Spline permite construir superfícies de maior suavidade que as grelha formada com curvas Bézier já que as primeiras gozam de continuidade $C^2$ nos pontos de junção.

Uma superfície gerada por curvas Bézier garante continuidade $C^1$ nos pontos de junção.

Ou seja as superfícies B-Spline permitem modelar objetos com níveis elevados de exigência de suavidade.

---

**QUESTÃO 5** (2 valores)

Apresente e justifique uma técnica de representação de sólidos que recomendaria para modelação de peças de automóvel.

R:

5) Tratando-se tipicamente de modelação com base na composição a partir de objetos previamente definidos (volumes) e mais simples a melhor técnica é a **instanciação de primitivas** a aplicar num conjunto de objetos básicos necessários à composição e disponibilizar para o efeito funções booleanas sobre volumes.

Pode-se ainda recorrer à **decomposição espacial** sendo que os objetos de partida constituem os modelos mais simples (cones, cilindros, rodas), e que permitem construir peças também recorrendo a funções booleanas sobre volumes.