

U.C. 21002
Álgebra Linear I

29 de janeiro de 2020

- O p-fólio é composto por **5** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II** a **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	III	IV	V
1.5 val.	3 val.	3 val.	1.5 val.

Nome:

Nº de Estudante: B. I./C.C. nº

Turma Assinatura do Vigilante:

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Então:

- a) A é invertível.
- b) $\det A = 3$.
- c) $\det(2A) = 3 \det A$.
- d) $\det(-A) = \det A$.

Questão 2

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y) = (x + y, y, x)$. Então:

- a) $\text{Nuc } f = \langle (1, 0, 0) \rangle$.
- b) $g(1, 1) = (1, 1, 1)$
- c) $(g \circ f)(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
- d) $\text{Nuc } f = \text{Nuc } (g \circ f)$.

Questão 3

Seja $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = -d \text{ e } b = c \right\}$. Então:

- a) F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\dim F = 1$.
- b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in F$.
- c) $F = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
- d) F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\dim F = 4$.

Nome:
Nº de Estudante: B. I./C.C. nº
Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de desenvolvimento

RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTE NO CADERNO DE PROVA

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Sejam F e G subespaços de \mathbb{R}^3 definidos por $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ e $G = \langle (1, -1, 0), (1, 1, 2) \rangle$. Então $F = G$.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores próprios da matriz A .

b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

c) Determine se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T(a, b, c) = ax^2 + (a + b)x + a + b + c.$$

a) Determine o núcleo de T e a dimensão da imagem de T .

b) Considerando as bases canónicas em \mathbb{R}^3 e em $\mathbb{R}_2[x]$ determine a matriz que representa T .

c) Determine se T é invertível, e em caso afirmativo determine a matriz que representa a inversa de T .

V. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$, e $w \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que $v = (A - I_n)w$ é solução do sistema $Ax = 0$.

FIM