UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21021

Computação Numérica

21 de julho de 2016

INSTRUÇÕES

Para a resolução do teste, leia as seguintes informações e instruções, antes de responder

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução do teste.
- O enunciado do teste incide sobre os cap. 1 a 4 do livro recomendado e sobre a linguagem de programação Octave, tem **4** páginas e termina com a palavra **FIM**.
- O único elemento de consulta permitido é o formulário que se encontra anexo a este enunciado.
- Para a execução do exame É INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- O cabeçalho deve ser preenchido de modo legível antes do início da resolução.
- As respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível por outra pessoa.
- As suas respostas devem ser claras, **indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão**. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização do teste é de 120 minutos, mais 30 minutos de tolerância.

I [2 valores]

1.1. [1] Calcule o polinómio de Taylor com 3 termos da função $f(x)=e^{x^2}-x$ para $x\in[-0.1, 0.1]$. Utilize $x_0=0$.

1.2. [1] Calcule uma estimativa do erro da aproximação polinomial obtida na alínea 1.1.

II [3 valores]

Considere a seguinte equação,

$$e^x - x - 1.3 = 0$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 1].

2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando três iterações do método de Newton, a partir do valor inicial $x_0=1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de k, x_k, $f(x_k)$, $f'(x_k)$, para k=0,1,2,3.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

III [3 valores]

Considere a matriz A e o vetor b,

$$A=\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\ 6 & 6 & 4\\ 2 & -3 & -3\end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix}10\\ 18\\ -2\end{bmatrix}$$

3.1. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax=b$ utilizando o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot. Indique claramente as operações elementares realizadas em cada passo da resolução.

IV [4 valores]

Considere a tabela seguinte de valores correspondente a uma função $f(x)$,

x	$f(x)$
0.2	0.940 067
0.3	0.865 336
0.4	0.761 061
0.6	0.465 336

4.1. [2] Obtenha o polinómio p_2 de grau dois interpolador de $f(x)$ nos nós 0.2, 0.4, 0.6, através da fórmula de Newton com diferenças divididas.

4.2. [2] Obtenha uma estimativa do erro de interpolação para $x = 0.5$.

V [8 valores]

5.1. [1.5] Considere a seguinte matriz A e vector v,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \; v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e o comando Octave `M=[[A v; 6, 1:2:5] [v*v'; v']]`. Indique a matriz M resultante.

5.2. [1.5] Considere as funções f(x)=-sen(x) e g(x)=x^2. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções f() e g() para x de -1 a 1 com intervalos de uma centésima e com as seguintes características:
- f() a traço contínuo de cor vermelho, com legenda;
- g() a traço contínuo de cor azul, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0, 1) deve ser assinalado com um marcador tipo cruz, de cor preta;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta “x”;
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta “f(x), g(x)”.

5.3. [5] Escreva a função em Octave,

```
function x=elim_gauss(A,b)
%
% Metodo de eliminação de Gauss
% Calcula a solucao de Ax=b
% A,b matriz e vector do sistema de equacoes
% x: vector com a solução do sistema
```

que implemente o método da eliminação de Gauss (sem seleção de pivot) para a resolução de um sistema de equações lineares definido por $Ax = b$.

FORMULÁRIO

Interpolação Polinomial

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\,\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

Equações Não Lineares

Método da bissecção

$$x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}$$

Método da secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Método do ponto fixo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Sistemas de Equações Lineares

Factorização $A = LU$

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11} \quad i \geq 2$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}) / u_{ii} \quad j > i \geq 2$$

Factorização (Choleski) $A = LL^T$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{i1} = a_{i1} / l_{11} \quad i \geq 2$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{ii} \quad j > i \geq 2$$

FIM