ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Grupo I

1.
Calculando ACA concluimos que a resposta certa é **d)**.

2.
A resposta certa é **b)**, pois D não é um subespaço. Por exemplo, a soma dos polinómios $p(x)=x$ e $P(x)=x-1$ é o polinómio $2x-1$ que não se anula nem em $x=0$ nem em $x=1$.

3.
Apenas a afirmação ii) é verdadeira e portanto a resposta certa é **c)**.

4.
A resposta certa é **b)**.

Grupo II

O sistema tem uma solução única se e só se o determinante da matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$$ for não nulo.

Calculando o determinante por aplicação do Teorema de Laplace primeiro à primeira linha da matriz A e depois calculando os quatro determinantes de terceira ordem, obtem-se $\det A=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

Para calcular y usando a Regra de Cramer substituímos a segunda coluna pela coluna dos termos independentes da matriz aumentada e calculamos o determinante dessa matriz, e vamos ver que se obtem

$$y=\frac{bp+aq-dr+cs}{a^2+b^2+c^2+d^2}\ .$$

Para calcular o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} a & p & c & d \\ -b & q & d & -c \\ -c & r & a & b \\ -d & s & -b & a \end{pmatrix}$ vamos utilizar a segunda coluna, uma vez que os parâmetros p, q, r e s só aparecem nessa coluna, e portanto isso deve simplificar as contas.
Aplicando então o Teorema de Laplace à segunda coluna obtemos uma soma de quatro determinantes de terceira ordem:

$$-p\begin{vmatrix} -b & d & -c \\ -c & a & b \\ -d & -b & a \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a & c & d \\ -c & a & b \\ -d & -b & a \end{vmatrix} - r\begin{vmatrix} a & c & d \\ -b & d & -c \\ -d & -b & a \end{vmatrix} + s\begin{vmatrix} a & c & d \\ -b & d & -c \\ -c & a & b \end{vmatrix}.$$

Calculando esses determinantes usando em cada caso a primeira coluna obtemos

$$\begin{aligned}
& -p\left(-b(a^2+b^2)+c(ad-bc)-d(bd+ac)\right) \\
& +q\left(a(a^2+b^2)+c(bd+ac)-d(bc-ad)\right) \\
& -r\left(a(ad+bc)+b(ac+bd)-d(-c^2-d^2)\right) \\
& +s\left(a(bd+ac)+b(bc-ad)-c(-c^2-d^2)\right) \\
=& pb\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+qa\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \\
& -rd\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+sc\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \\
=& \left(pb+qa-rd+sc\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right).
\end{aligned}$$

Uma vez que $|A| \neq 0$, a regra de Cramer diz-nos que

$$y = \frac{|B|}{|A|} = \frac{\left(pb+qa-rd+sc\right)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2},$$

e portanto $y = \dfrac{bp+aq-dr+cs}{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

Grupo III

Para mostrar que

$$\begin{vmatrix} x+y+z & x+y & x & x \\ x+y & x+y+z & x & x \\ x & x & x+y+z & x+y \\ x & x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} = z^2(2y+z)(4x+2y+z),$$

vamos começar por simplificar a matriz usando operações sobre colunas e linhas, de modo a obter uma coluna só com um elemento não nulo com vista a utilizar o Teorema de Laplace.

Tem-se

$$\begin{vmatrix} x+y+z & x+y & x & x \\ x+y & x+y+z & x & x \\ x & x & x+y+z & x+y \\ x & x & x+y & x+y+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1-c_2 \\ c_3-c_4}]{} \begin{vmatrix} z & x+y & 0 & x \\ -z & x+y+z & 0 & x \\ 0 & x & z & x+y \\ 0 & x & -z & x+y+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1+\ell_2 \\ \ell_3+\ell_4}]{} \begin{vmatrix} z & x+y & 0 & x \\ 0 & 2x+2y+z & 0 & 2x \\ 0 & 2x & 0 & 2x+2y+z \\ 0 & x & -z & x+y+z \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 2x+2y+z & 0 & 2x \\ 2x & 0 & 2x+2y+z \\ x & -z & x+y+z \end{vmatrix}$$

$$= z^2 \begin{vmatrix} 2x+2y+z & 2x \\ 2x & 2x+2y+z \end{vmatrix} = z^2 \left((2x+2y+z)^2 - (2x)^2\right)$$

$$= z^2 \left(2x+2y+z+2x\right)\left(2x+2y+z-2x\right) = z^2(4x+2y+z)(2y+z).$$

Observação: Tanto neste grupo como no grupo anterior é necessário algum cuidado quando dividimos alguma linha (ou coluna) por um valor não necessariamente não nulo.

Grupo IV

Como $A^{2020} + A^{2019} = A\left(A^{2019} + A^{2018}\right)$ tem-se $A\left(A^{2019} + A^{2018}\right) = I_2$ e portanto $\det A \times \det\left(A^{2019} + A^{2018}\right) = \det I_2 = 1$. Logo $\det A$ não se pode anular e portanto A é invertível.

De modo inteiramente análogo tem-se
$A^{2020} + A^{2019} = I_2 \implies A^{2019}(A+I_2) = I_2 \implies \det A^{2019} \times \det(A+I_2) = \det I_2 = 1.$
Logo $\det(A+I_2) \neq 0$.

FIM