Elementos de Probabilidades e Estatística (21037)

7 junho 2019

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Sendo Ω o conjunto de clientes do hamburguer KKBig Gourmet, consideremos os acontecimentos:
I - o cliente escolhe molho de iogurte;
C - o cliente escolhe cogumelos Portobello;
B - o cliente escolhe lascas de banana da Madeira.
É dada a seguinte informação:

$$P(I) = 0.4 \quad P(C) = 0.25 \quad P(B) = 0.2 \quad P(C \cap B) = 0.03$$

$$P(B \cap \bar{I}) = 0.1 \quad P(C|I) = 0.15 \quad P(I \cap C \cap B) = 0.01$$

(15% cotação)

1.1 `(1.5 valores)`
Pede-se $P(I \cup C \cup B)$

$$P(I \cup C \cup B) = P(I) + P(C) + P(B) - P(I \cap C) - P(I \cap B) - P(C \cap B) + P(I \cap C \cap B)$$

(25% cotação)
Mas

$$P(C \cap I) = P(I)P(C|I) = 0.4 \times 0.15 = 0.06$$

$$P(I \cap B) = P(B) - P(B \cap \bar{I}) = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

(50% cotação)
Logo

$$P(I \cup C \cup B) = 0.4 + 0.25 + 0.2 - 0.06 - 0.1 - 0.03 + 0.01 = 0.67$$

(10% cotação)

1.2 `(1.75 valores)`
Pretendemos provar que

$$p = P\left((I \cap C \cap \bar{B}) \cup (I \cap \bar{C} \cap B) \cup (\bar{I} \cap C \cap B)\right) = 0.16$$

(25% cotação)
Como os acontecimentos $I \cap C \cap \bar{B}$, $I \cap \bar{C} \cap B$ e $\bar{I} \cap C \cap B$ são dois a dois incompatíveis:

$$p = P(I \cap C \cap \bar{B}) + P(I \cap \bar{C} \cap B) + P(\bar{I} \cap C \cap B)$$

(25% cotação)

$$P(I \cap C \cap \bar{B}) = P(I \cap C) - P(I \cap C \cap B) = 0.06 - 0.01 = 0.05$$
$$P(I \cap \bar{C} \cap B) = P(I \cap B) - P(I \cap C \cap B) = 0.1 - 0.01 = 0.09$$
$$P(\bar{I} \cap C \cap B) = P(C \cap B) - P(I \cap C \cap B) = 0.03 - 0.01 = 0.02$$

(45% cotação)
pelo que $p = 0.05 + 0.09 + 0.02 = 0.16$. *(5% cotação)*

1.3 Seja X - número de ingredientes opcionais escolhidos pelo cliente.

[1.3.1]`(2 valores)`
Queremos determinar $f_X(x) = P(X = x)$ com $X(\Omega) = 0, 1, 2, 3$ e

$$P(X = 0) = P(\bar{I} \cap \bar{C} \cap \bar{B}) = 1 - P(I \cup C \cup B) = 0.33$$

$$P(X = 2) = P(I \cap C \cap \bar{B}) + P(I \cap \bar{C} \cap B) + P(\bar{I} \cap C \cap B) = 0.16$$
$$P(X = 3) = P(I \cap C \cap b) = 0.01$$

Como $P(X \geq 1) = P(I \cup C \cup B)$ temos

$$P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3) = 0.67 \Rightarrow P(X = 1) = 0.67-0.16-0.01 = 0.5$$

(75% cotação)
a função de probabilidade de de X, $f_X(x) = P(X = x)$ é definida por:

x	0	1	2	3
$f_x(x) = P(X = x)$	0.33	0.5	0.16	0.01

(25% cotação)

[1.3.2]`(1 valor)`

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = 0\times0.33+1\times0.5+2\times0.16+3\times0.01 = 0.85$$

(100% cotação)

[1.3.3]`(1.5 valores)`
Função distribuição de X:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

(25% cotação)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.33 & 0 \leq x < 1 \\ 0.33 + 0.5 = 0.83 & 1 \leq x < 2 \\ 0.33 + 0.5 + 0.16 = 0.99 & 2 \leq x < 3 \\ 0.33 + 0.5 + 0.16 + 0.01 = 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

(75% cotação)

[1.3.4]`(1.25 valores)`

$$P(X = 3|X \geq 1) = \frac{P\left((X = 3) \cap (X \geq 1)\right)}{P(X \geq 1)}$$

(50% cotação)

$$= \frac{P(X = 3)}{P(X \geq 1)} = \frac{0.01}{0.67} = \frac{1}{67}$$

(50% cotação)

[1.3.5]`(1.5 valores)`

Temos de determinar os possíveis valores de Y tendo em conta os elementos do suporte de X

x	0	1	2	3
$y = \|x - 2\|$	2	1	0	1

(25% cotação)

e as probabilidades:

$$P(Y = 0) = P(X = 2) = 0.16$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(Y = 3) = 0.51$$

$$P(Y = 2) = P(X = 0) = 0.33$$

(50% cotação)

Y é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade definida por:

Y	0	1	2
$f_y(y) = P(Y = y)$	0.16	0.51	0.33

(25% cotação)

2. `(3 valores)`

Seja $X =$ a v.a. número de bilhetes de comboio emitidos na estação de São Bento no Porto num dia. Tem-se $E(X) = 50 = V(X)$.
Pretende-se calcular:

$$P\left(\sum_{i=1}^{32} X_i < 1679\right)$$

onde X_i descreve o número de bilhetes de comboio emitidos no dia i, $i = 1, \ldots, 32$. *(20% cotação)*
As v.a. X_i seguem a mesma lei que X, são independentes e possuem a mesma média e variância $E(X_i) = V(X_i) = 50$. Como temos um número de parcelas maior do que 30 e pelo Teorema do Limite Central:

$$T = \sum_{i=1}^{32} X_i \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$$

onde $\mu_T = E(T) = 32 \times E(X) = 32 \times 50 = 1600$ e $\sigma_T^2 = V(T) = 32 \times V(X) = 1600$.
(40% cotação)

$$P(T < 1679) = P\left(Z < \frac{1679 - 1600}{\sqrt{1600}}\right) = P\left(Z < \frac{79}{40}\right)$$

(20% cotação)
onde $Z \sim N(0, 1)$, utilizando a tabela da distribuição Normal Reduzida:

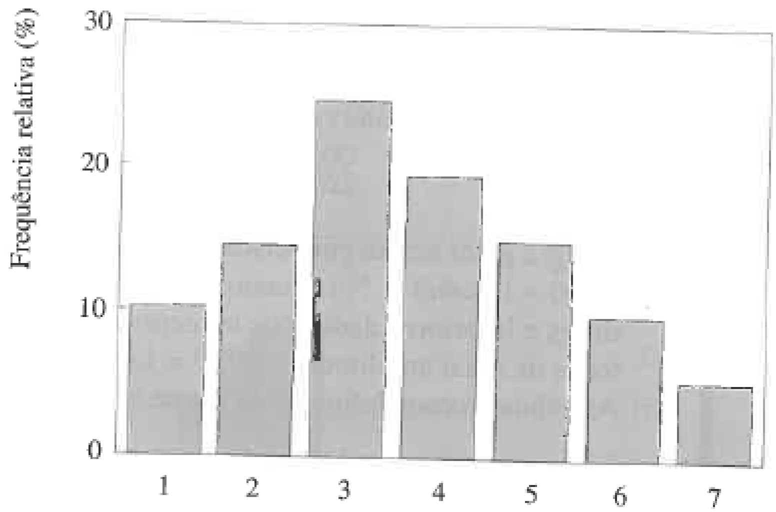
$$P(Z < 1{,}975) \cong 0.9756$$

Concluímos deste modo que a probabilidade de, em 32 dias serem emitidos menos de 1679 bilhetes é aproximadamente de 0.9756.
(20% cotação)

3

Número de cafés por funcionário	Frequência absoluta	Frequência relativa (%)
1	103	10.3
2	147	14.7
3	248	24.8
4	197	19.7
5	152	15.2
6	100	10.0
7	53	5.3

3.1 `(2 valores)`



(100% cotação)

3.2 `(1 valor)`

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_k x_k = 0.103 \times 1 + 0.142 \times 2 + 0.248 \times 3 +$$
$$+ 0.197 \times 4 + 0.152 \times 5 + 0.1 \times 6 + 0.053 \times 7 = 3.66$$

(100% cotação)

3.3 `(1 valor)`
O número de dados 1000 é par, verifica-se que os dados que ocupam as posições centrais são x_{500} e x_{501} pertencem ambos à classe de 4 cafés. A mediana é $Med = 4$.
(100% cotação)

3.4 `(1 valor)`
A moda é o valor que ocorre com mais frequência, neste caso $Mod = 3$.
(100% cotação)

3.5 `(1.5 valores)`
Para Q_1 temos a ordem aproximada $1 + 999 \times 0.25 = 250.75$, a posição x_{251} que pertence à classe 3 cafés. $Q_1 = 3$.

(25% cotação)
Para Q_3 temos a ordem aproximada $1 + 99 \times 0.75 = 750.25$, a posição x_{750} que pertence à classe 5 cafés. $Q_3 = 5$.
(25% cotação)
$AIQ = 5 - 3 = 2$
(50% cotação)