UNIVERSIDADE ABERTA
www.univ-ab.pt

e-Fólio B

cartão de aprendizagem

Nome: ....

B.I./C.C.: .... **Nº de Estudante:** ....

Licenciatura: .... **Turma:** ....

Unidade Curricular: Álgebra Linear I **Código:** 21002

Data: .... **Ano Letivo:** 2014/2015

Docente: Rafael Sasportes **Classificação:** ....

Para a resolução do **e-Fólio B**, aconselha-se que:

- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 5 grupos de questões, num total de 3 páginas e termina com a palavra FIM. As *suas respostas* às questões deste e-Fólio não podem ultrapassar **nove** páginas A4; páginas adicionais não serão classificadas.
- Escreva sempre com letra legível ou usando um processador de texto matemático conveniente.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato *pdf*), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio B" até ao dia **19 de janeiro**.

Critérios de avaliação e cotação:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Exceto nas questões de escolha múltipla, justifique *cuidadosa e detalhadamente* todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II e V têm cotação de 0.5 valores cada. Os Grupos III e IV têm cotação de 1 valor cada.

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja $\mathcal{S} = ((1,-1,4),\ (0,1,-3),\ (1,0,1))$ uma sequência de vetores de $\mathbb{R}^3$. Então:

☐ **a)** $\mathcal{S}$ é um conjunto gerador, mas não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

☐ **b)** $\mathcal{S}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, diferente da base canónica.

☐ **c)** $\mathcal{S}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

☐ **d)** $\dim\langle(1,-1,4),\ (0,1,-3),\ (1,0,1)\rangle < 3$.

2. Seja $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ uma matriz com apenas três valores próprios, com multiplicidades algébricas iguais e tal que o produto dos valores próprios satisfaz $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6$. Então:

☐ **a)** O polinómio característico de A pode ser $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.

☐ **b)** Uma matriz A nestas condições nunca é invertível.

☐ **c)** Os valores próprios de A podem ter multiplicidades geométricas diferentes.

☐ **d)** $\det A = 6$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja A_α a matriz definida por $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, e considere as seguintes afirmações:

(i) A_α é diagonal para todo o α;

(ii) A_α é diagonalizável para algum α;

(iii) se o vetor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$ pertence ao núcleo de A_α então $\alpha = 1$;

(iv) o vetor $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top$ é um vetor próprio de A_α para algum α.

Então as afirmações verdadeiras são:

☐ **a)** (i) e (ii) ☐ **c)** (iii) e (iv)

☐ **b)** (ii) e (iii) ☐ **d)** (ii) e (iv)

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz com polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, e considere as seguintes afirmações:

(i) A tem traço nulo;

(ii) A é diagonalizável;

(iii) $\det A = -1$;

(iv) A tem um subespaço próprio com dimensão 2.

Então a lista completa das afirmações verdadeiras é:

☐ **a)** (i) e (iii) ☐ **c)** (i), (ii) e (iv)

☐ **b)** (ii) e (iii) ☐ **d)** (i), (ii) e (iii)

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se u é um vetor próprio de A então u é também um vetor próprio de A^k para todo $k \geqslant 2$.

b) Se u é um vetor próprio de A^k para algum $k \geqslant 2$ então u é também um vetor próprio de A.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determine:

(i) O polinómio característica de A.

(ii) Uma base para cada um dos espaços próprios de A.

(iii) A multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

(iv) Diga, justificadamente, se a matriz A é semelhante a uma matriz diagonal.

IV. Seja T um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T(e_1) = (1, 0, 1), \qquad T(e_2) = (2, 1, 2) \quad \text{e} \quad T(e_3) = (1, 1, 1),$$

onde $(e_1, e_2, e_3) = \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}$.

(i) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(T, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ no espaço de partida e no espaço de chegada.

(ii) Determine uma base do núcleo de T.

(iii) Determine a dimensão da imagem de T.

(iv) Verifique que

$$\mathcal{B} = ((-1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, -1, 0))$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ e determine a matriz $\mathcal{C} = \mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \text{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ que representa a transformação T em relação à base $\mathcal{B}$ no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

V. Para cada $n \geqslant 2$, seja $J_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a matriz que tem todas as suas entradas iguais a 1, ou seja $J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Determine os valores próprios e os espaços próprios de J_n.

(*Sugestão*: Comece por justificar que um dos valores próprios é $\lambda = 0$ e determine a dimensão do espaço próprio associado E_0.)

FIM