ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

e-fólio global | resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção do e-fólio global. Não se destina a estudo ou revisão.

Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Além disso, algumas das perguntas foram personalizadas usando o número do estudante. Nesses casos, apenas a solução final é fornecida.

Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nas submissões dos alunos.

I. (*2 valores*)

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Im} T$.
Resolução: Falso. Temos

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Nuc} T.$$

Pois,

$$(\dim \operatorname{Im} T, \dim \operatorname{Nuc} T) \in \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\},$$

e as dimensões do núcleo e da imagem sempre são diferentes.

b) $\det : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma aplicação linear.
Resolução: Falso. $\det(2I_3) = 8 \neq 2 = 2\det I_3$.

II. (*4 valores*) Neste exercício, o valor de r é determinado pelos últimos 2 dígitos do seu número de estudante. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 45$.

Para $k \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + 2z = 8 \\ 2x - y + z = 0 \\ -3x + y - 2z = r\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ a resolubilidade do sistema (1) e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

b) Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ verifique que as soluções que obteve são de facto soluções do sistema (1).

Resolução: A resolução correta para esta questão depende do valor de r, e será diferente para cada estudante.

Em função de r, a solução do sistema (1) é:

Se $k = 2$ (e $0 \leqslant r \leqslant 99$), a sistema não tem solução.

Se $k \neq 2$, a sistema tem solução única

$$x = \frac{-2r-8}{2-k}, \quad y = \frac{kr-4r-8}{2-k}, \quad z = \frac{kr+8}{2-k}$$

III. (*4 valores*)

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Determine o polinómio característico da matriz A.

Resolução: O polinómio caracteristico de A é

$$\det \begin{bmatrix} 0-\lambda & -4 & 4 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)-8) = (-2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)$$

$$= (-2-\lambda)(-2-\lambda)(4-\lambda)$$

b) Determine justificadamente a multiplicidade algébrica de cada um dos valores próprios da matriz A.

Resolução: De acordo com a), os valores próprios de A são -2 e 4, com $\mathrm{m.a.}(-2) = 2$ e $\mathrm{m.a.}(4) = 1$.

c) Para cada valor próprio da matriz A, determine justificadamente a sua multiplicidade geométrica e uma base para o seu espaço próprio.

Resolução: E_{-2} é o espaço nulo de $A-(-2)I_3$

$$= \begin{bmatrix} 0-(-2) & -4 & 4 \\ 0 & -2-(-2) & 0 \\ 2 & -4 & 2-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Este matrix é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)

Portanto $E_{-2} = \{(2y-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1,0), (-2,0,1) \rangle$ e $\mathrm{m.\,g.}(-2) = 2$.

E_4 é o espaço nulo de $A-4I_3$

$$= \begin{bmatrix} 0-4 & -4 & 4 \\ 0 & -2-4 & 0 \\ 2 & -4 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Este matrix é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)

Portanto $E_4 = \{(z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1) \rangle$ e $\mathrm{m.\,g.}(4) = 1$.

d) Determine se é possível obter uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine P.

Resolução: Porque $\mathrm{m.\,a.}(-2) = \mathrm{m.\,g.}(-2), \mathrm{m.\,a.}(4) = \mathrm{m.\,g.}(4)$, P existe e é obtido escolhendo bases para E_{-2} e E_4. Portanto

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(outras resoluções posível)

IV. (*2 valores*) Neste exercício, o valor de r é determinado pelos últimos 3 dígitos do seu número de estudante. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 345$.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{r+2} = -A$. O que pode afirmar sobre o determinante de A? Justifique.

Resolução: A resolução correta para esta questão depende do valor de r, e será diferente para cada estudante.

Em geral, se r é par:

$\det A \in \{0, 1\}$, se n par, $\det A \in \{-1, 0\}$ se n impar

Se r é impar:

$\det A \in \{0, 1, -1\}$, se n par

$\det A = 0$, se n impar.

Fim