

U.C. 21082

Matemática Finita

20 de setembro de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 9 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
3.50	2.0	3.50	1.50	5.50

Nome:

Nº de Estudante: CC/BI nº

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Dados três dados, um preto, um vermelho e um amarelo, quantas são as maneiras de saírem **exactamente** dois números iguais?

☐ a) 540

☐ c) 90

☐ b) 96

☐ d) 30

2. Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ par} \\ n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$. Tem-se que:

☐ a) f não é injectiva, nem sobrejectiva

☐ b) f é injectiva, mas não é sobrejectiva

☐ c) f é sobrejectiva, mas não é injectiva

☐ d) f é bijectiva

3. Sejam a um número inteiro negativo e b um número inteiro positivo. Tem-se que $\text{mmc}(a, b)$ **não** é igual a:

☐ a) $\text{mmc}(-a, b)$

☐ c) $-\text{mmc}(|a|, b)$

☐ b) $\text{mmc}(a, -b)$

☐ d) $\text{mmc}(|a|, b)$

4. Seja $a_n = 2^n + 3(-1)^n$ uma solução da fórmula de recorrência $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, cujas raízes do polinómio característico são α_1, α_2 . Então:

☐ a) $a = 1, b = 3$

☐ c) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$

☐ b) $a = 2, b = -1$

☐ d) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. De um grupo de 11 informáticos e 5 matemáticos pretende-se formar uma comissão de 3 informáticos e 2 matemáticos. De quantas maneiras podemos formar a comissão...

5.1. ... se qualquer informático e qualquer matemático pode ser incluído;

5.2. ... se determinado informático deve fazer parte da comissão;

5.3. ... se dois determinados matemáticos estão impossibilitados de pertencer à comissão.

6. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$, mostre que

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{m}{r+1}.$$

7. Considere os números 252 e 105.

7.1. Calcule, justificando, $\text{mdc}(252, 105)$.

7.2. Averigue, justificando, a existência de solução inteira em x e y da equação

$$252x + 105y = 7.$$

8. Utilizando um critério de divisibilidade por 7 verifique que a seguinte fracção é irredutível,

$$\frac{72684}{7}.$$

9. Seja $\langle a_n \rangle$ a solução da relação de recorrência

$$a_n = 7a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

para a condição inicial $x_0 = 0$.

- 9.1. Prove que

$$a_n = \frac{7^n - 1}{6}, \quad n \in \mathbb{N},$$

por recurso...

9.1.1. ... ao método de indução matemática;

9.1.2. ... ao método de substituição de diante para trás.

- 9.2. Verifique, justificando, que para todo o $n \in \mathbb{N}$ tem-se $a_n \in \mathbb{N}$.