ANÁLISE DE FOURIER E APLICAÇÕES | 21161

Período de Realização

Decorre de 25 de outubro a 1 de novembro de 2019

Data de Limite de Entrega

1 de novembro de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Temas

Temas 1 e 2 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes aos temas indicados supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 2,0 valores
2. 1,0 valores

Total: 3,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Considere a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

a. Prolongue f a todo o $\mathbb{R}$ de modo que a função obtida, chamemos-lhe f_1, seja 2π-periódica e a sua série de Fourier seja uma série de cossenos.

b. Determine a série de Fourier S_{f_1} da função f_1 que obteve na alínea anterior e esboce o gráfico de f_1 e de S_{f_1}.

c. Repita as duas alíneas anteriores quando se impõe que a série de Fourier S_{f_2} da função prolongada f_2 seja agora uma série de senos. Esboce os gráficos de f_2 e de S_{f_2}.

d. Será possível encontrar uma prolongada de f a todo o $\mathbb{R}$, digamos f_3, de modo a que a sua série de Fourier, S_{f_3}, seja uma série de senos *e* de cossenos ? Se sim, exiba uma função f_3 nessas condições e determine a sua série de Fourier S_{f_3}.

e. Será possível resolver a alínea c) se for imposta a condição adicional da série de Fourier ser contínua em todo o $\mathbb{R}$? Explique pormenorizadamente.

2. Enuncie (mas *não prove*) o teorema conhecido como “identidade de Parseval” e use-o para resolver o exercício 10.5 na página 47 do livro de Djairo Figueiredo.

FIM

RESOLUÇÃO

1.a. Para que a série de Fourier de f_1 seja uma série de cossenos a função tem de ser par (a menos de um conjunto de medida nula), pelo que f_1 em $[-\pi, 0[$ tem de satisfazer $f_1(x) = f(-x)$. Isto determina a função em $[-\pi, \pi]$. Para que tenha um período igual a 2π há apenas que prolongá-la a todo o $\mathbb{R}$ (por periodicidade). O resultado é a função

$$f_1(x) = \left|\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right|.$$

1.b. Sendo f_1 uma função par 2π-periódica tem-se que a sua série de Fourier é

$$S_{f_1}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| \cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{x}{2}\right) \cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{4}{1-4n^2}\cos(n\pi) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{4(-1)^n}{1-4n^2} \end{aligned}$$

Sendo a função f_1 contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, o teorema de Fourier sobre a convergência pontual é aplicável e sabemos que $S_{f_1}(x) = f_1(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, pelo que os gráficos das duas funções são coincidentes, como mostra na Figura 1.

1.c. Para que a série de Fourier de f_2 seja uma série de senos a função tem de ser ímpar (a menos de um conjunto de medida nula), pelo que f_2 em $[-\pi, 0[$ tem de satisfazer $f_2(x) = -f(-x)$. Isto determina a função em $[-\pi, \pi]$. Para que tenha um período igual a 2π há apenas que prolongá-la a todo o $\mathbb{R}$ (por periodicidade). O resultado é a função

$$f_2(x) = \cos\left(\tfrac{x-2k\pi}{2}\right),\ \ x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi[,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

ou qualquer função que difira desta num conjunto de medida nula. Sendo f_2 uma função ímpar 2π-periódica tem-se que a sua série de Fourier é

$$S_{f_2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

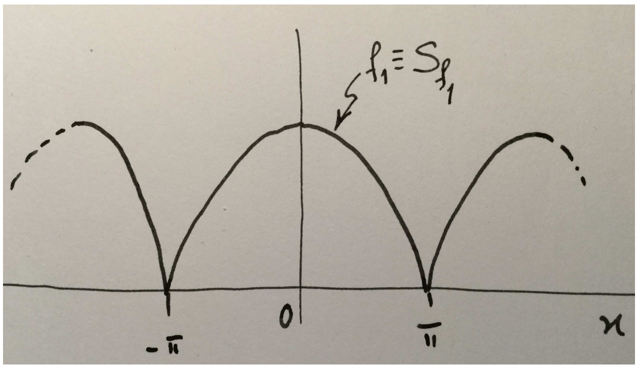

Figura 1: Parte do gráfico de f_1 e de S_{f_1}.

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{4n}{4n^2-1} \end{aligned}$$

Sendo a função f_2 seccionalmente contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, o teorema de Fourier sobre a convergência pontual é aplicável e sabemos que $S_{f_2}(x) = f_2(x)$ em todos os pontos onde f_2 for contínua, ou seja, em $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e tem-se $S_{f_2}(2k\pi) = 0$, como se evidencia no gráfico na Figura 2.

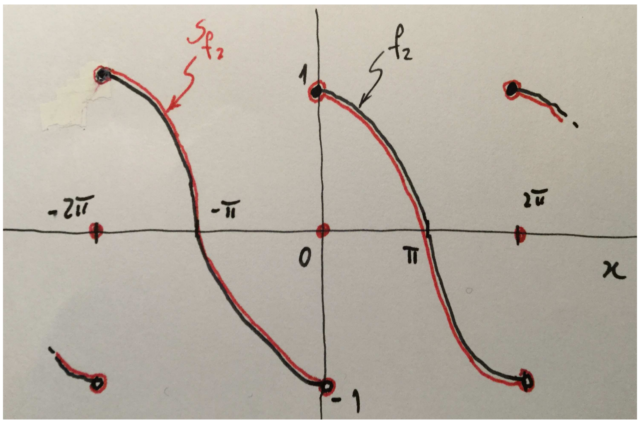

Figura 2: Parte do gráfico de f_2 (a preto) e de S_{f_2} (a vermelho).

1.d. A resposta é afirmativa: basta que a prolongada de f a todo o $\mathbb{R}$, f_3, não seja nem par nem ímpar em quase toda a parte (no sentido da teoria da medida, i.e.: a menos de um conjunto de medida nula). Um exemplo mantendo a periodicidade 2π usada até ao momento é a função obtida prolongando f a $[\pi, 2\pi]$ com o valor identicamente zero e depois prolongar por periodicidade a $\mathbb{R}$, ou seja, $f_3(x) = (f_2(x))_+$, onde se usou a notação $z_+ = \max\{z, 0\}$, e onde f_2 é a função da alínea 1.c).

A série de Fourier de f_3 é

$$S_{f_3} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_2(x))_+ \cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-4n^2}\cos(n\pi) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_2(x))_+ \sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{4n}{4n^2-1} \end{aligned}$$

1.e. Para que a série de Fourier seja uma série de senos a função tem de ser ímpar (em quase toda a parte), pelo que tem necessariamente de ter uma descontinuidade de salto[1] em $x = 0$ (e portanto, por periodicidade, também em $x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Pelo teorema de Fourier a série de Fourier terá também uma descontinuidade nesses pontos. Consequentemente a resposta à questão colocada é negativa.

[1] Ou seja: existem os limites da função à esquerda e à direita mas são distintos.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2L$-periódica, tal que f, $|f|$ e $|f|^2$ são integráveis em intervalos limitados de $\mathbb{R}$, então tem-se

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2 dx, \tag{1}$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de f.

Suponhamos agora que temos uma função f diferenciável, com f', $|f'|$ e $|f'|^2$ integráveis em intervalos limitados de $\mathbb{R}$, então podemos utilizar integração por partes para escrever os coeficientes de Fourier de f em termos dos coeficientes de Fourier de f', do seguinte modo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= -\frac{L}{n\pi}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= -\frac{L}{n\pi}b_n' \end{aligned}$$

onde b_n' são os coeficientes de Fourier de senos de f', e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{L}{n\pi}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= -\frac{L}{n\pi}a_n' \end{aligned}$$

onde a_n' são os coeficientes de Fourier de cossenos de f'.

Portanto, tendo presente que $(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, pode-se escrever

$$|a_n| = \frac{L}{n\pi}|b_n'| \leqslant \frac{1}{2}\frac{L^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}|b_n'|^2, \qquad |b_n| = \frac{L}{n\pi}|a_n'| \leqslant \frac{1}{2}\frac{L^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}|a_n'|^2,$$

e consequentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \leqslant \frac{L^2}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n'|^2 + |b_n'|^2) \tag{2}$$

Aplicando agora a identidade de Parseval (1) a f' tem-se

$$\frac{1}{2}(a_0')^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n')^2 + (b_n')^2\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f'(x)|^2 dx,$$

e, portanto, pela hipótese de integrabilidade de $|f'|^2$ em intervalos compactos, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a'_n)^2+(b'_n)^2\right)$ é convergente.

Como $a_n^2+b_n^2 \leqslant a_n^2+b_n^2+2|a_n||b_n| = (|a_n|+|b_n|)^2$ e como $x \mapsto \sqrt{x}$ é uma função monótona crescente, conclui-se imediatamente que $\sqrt{a_n^2+b_n^2} \leqslant |a_n|+|b_n|$. Consequentemente, usando este resultado e (2) concluimos imediatamente que a série $\sum_n \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ é convergente.