Geometria - 21165

Actividade formativa I

Problema 1. *Demonstre as seguintes consequências dos axiomas de incidência $A_1 - A_3$:*

a) Para cada linha l existe pelo menos um ponto P que não incide com l.

b) Para cada ponto P existe pelo menos uma linha que não passa por P.

Solução:

a) Por A3, existem três pontos A, B, C, não-colineares. Como são não-colineares, não podem pertencer todos a uma mesma linha. Em particular não podem pertencer à linha l. Então pelo menos um destes pontos é exterior a l.

b) Por A3 existem 3 pontos não-colineares, sejam eles A, B, C. Há duas hipóteses: ou P é um deles ou não. Se P é um deles, suponhamos sem perda de generalidade que P é A (se fosse um dos outros dois, aplicava-se um raciocínio idêntico). Então por A1 existe uma única linha BC que contém B e C. Mas BC não pode conter P porque P, B, C (ou seja A, B, C) não são colineares. Resta o caso em que P não é um dos três pontos. Por $A1$, cada dois pontos formam uma única linha. Podemos portanto assumir que existem as linhas AB, BC, e AC. Vamos provar que P tem que ser exterior a pelo menos uma delas. Se P não pertence a qualquer delas, está resolvido. Suponhamos então que P pertence a pelo menos uma delas, e, sem perda de generalidade, suponhamos que essa linha é AB. Como A, B, C são não-colineares, então AB e AC não podem ter mais do que um ponto em comum (senão, por A1, seriam a mesma linha, que conteria A, B, e C). Mas AB e AC têm em comum o ponto A, portanto não podem ter qualquer outro ponto em comum. Em particular, como P pertence a AB, não pode pertencer a AC. Então a recta AC não passa por P.

Problema 2. *Sejam $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ planos de incidência (isto é, modelos dos axiomas de incidência $A_1 - A_3$). Seja $\varphi : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_1$ uma colineação, ou seja, uma bijecção que verifica a seguinte propriedade:*

A, B, C são pontos colineares de $\mathcal{E}_1$ sse ("se e só se") $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ são pontos colineares de $\mathcal{E}_2$

Mostre que:

a) Se l é uma linha de $\mathcal{E}_1$, então $\varphi(l)$ é uma linha de $\mathcal{E}_2$.

b) Se l_1 e l_2 são linhas concorrentes de $\mathcal{E}_1$, $\varphi(l_1)$ e $\varphi(l_2)$ são linhas concorrentes de $\mathcal{E}_2$.

c) Há tantas linhas de $\mathcal{E}_1$ passando por $P \in \mathcal{E}_1$ como há linhas de $\mathcal{E}_2$ passando por $P' = \varphi(P)$.

Solução:

a) Seja l uma linha de $\mathcal{E}_1$. Então pelo axioma A_2, existem pelo menos dois pontos distintos A e B sobre l. Sejam $A' = \varphi(A), B' = \varphi(B)$ as imagens destes pontos por φ. Sabemos que A' e B' são pontos distintos porque A e B são pontos distintos e φ é bijectiva. Então por A_1 existe uma e uma só linha r que passa por A' e B'. Se provarmos que $r = \varphi(l)$ teremos demonstrado o que pretendíamos. Vamos partir a prova em duas partes:

i) mostrar que todo o ponto de l é transformado por φ num ponto de r.

ii) mostrar que todo o ponto de r é imagem de algum ponto de l.

Seja C um ponto de l. Seja $C' = \varphi(C)$. Como C é ponto de l, A, B, C são colineares. Como φ é colineação, então A', B', C' são colineares. Mas por A_1 sabemos que a linha que passa por A', B' é única. Então $C' \in r$. Isto demonstra (i).

Seja D' um ponto qualquer de r. Seja $D = \varphi^{-1}(D')$ a sua imagem inversa (única, porque uma colineação é bijectiva) em $\mathcal{E}_1$. Como A', B', D' são colineares, A, B, D são colineares. Pela condição de unicidade do axioma A_1, $D \in l$. Mas $D' = \varphi(\varphi^{-1}(D')) = \varphi(D)$. Portanto D' é imagem de um ponto de l.

Então $r = \varphi(l)$.

Demonstrámos que toda linha l de $\mathcal{E}_1$ é transformada por φ numa linha de $\mathcal{E}_2$.

b) Como l_1 e l_2 são concorrentes, existe um ponto C que pertence a ambas. Pela alínea a), $l_1' = \varphi(l_1)$ e $l_2' = \varphi(l_2)$ são rectas de $\mathcal{E}_2$. Se C pertence a uma linha, então a sua imagem $C' = \varphi C$ pertence à imagem dessa linha. Então, como $C \in l_1$, temos $C' \in l_1'$, e como $C \in l_2$, $C' \in l_2'$. Então C' é um ponto comum às linhas l_1' e l_2', pelo que as linhas são concorrentes.

c) Já vimos que φ transforma linhas em linhas. Se l é uma linha que passa por C então a $\varphi(l)$ é uma linha que passa por $P' = \varphi(P)$. Se r é uma linha que passa por $P' = \varphi(P)$ então $\varphi^{-1}(r)$ é uma linha que passa por P (nota: assumimos de passagem o resultado de que a inversa de uma colineação é uma colineação. Isto segue trivialmente da definição de colineação, mas fica ao cargo do estudante verificar em detalhe porque é que é assim). Vamos mostrar que há uma bijecção entre as linhas que passam por P e as linhas que passam por $\varphi(P)$.

Já vimos na alínea a) que se o conjunto l é uma linha de $\mathcal{E}_1$, então o conjunto imagem, $\varphi(l)$, é uma linha de $\mathcal{E}_2$.

Sendo assim a aplicação φ entre os planos de incidência induz uma aplicação entre os respectivos conjuntos de linhas. Seja $L_1(P)$ e $L(P')$ respectivamente o conjunto das linhas que passam por P e por P'. Seja f a restrição a $L_1(P)$ da aplicação $l \mapsto \varphi(l)$. Vamos mostrar que $f : L_1(P) \to L_2(P')$ é uma bijecção.

Injectividade: Sejam l_1 e l_2 duas linhas distintas de $L_1(P)$. Então por A_2 existem pontos A, B, tal que $l_1 = PA$ e $l_2 = PB$, e A, B, P não são colineares, pois l_1 e l_2 são distintas. Então como φ é uma colineação, $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(P)$ são não-colineares. Mas $f(l_1) = \varphi(P)\varphi(A)$, e $f(l_2) = \varphi(P)\varphi(B)$. Então $f(l_1)$ e $f(l_2)$ são linhas distintas. Isto prova a injectividade de f.

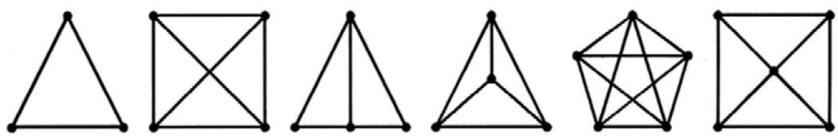
Sobrejectividade: Seja l' uma linha que passa por P'. Existe por A_2 um ponto B tal que $l' = P'B$. Então $l' = f(P\varphi^{-1}(B))$.

Então f é uma bijecção entre $L_1(P)$ e $L_2(\varphi(P))$

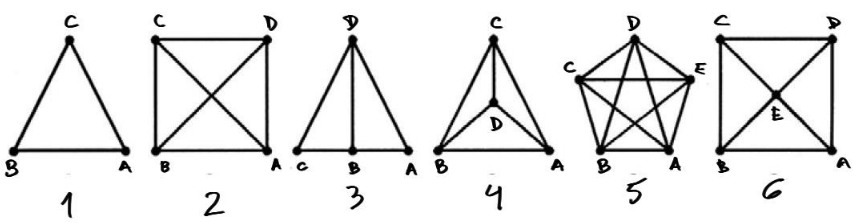
Problema 3. *Mostre, usado modelos finitos, que cada um dos três axiomas de incidência plana A_1, A_2, A_3 é independente dos outros dois.*

Solução: 1) O seguinte modelo verifica A_1, A_2, mas não verifica A_3.
Seja S um conjunto finito. Tomamos o seguinte modelo:
Pontos: $\mathcal{E} = S$
Linhas : $\mathcal{L} = \{S\}$
Ou seja, há uma única linha, que contém todos os pontos.
2) O seguinte modelo verifica A_1, A_3, mas não verifica A_2.
Pontos: $\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$
Linhas : $\mathcal{L} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$
O facto de $\{1\}$ ser uma linha contradiz A_3. No entanto, por cada dois pontos distintos passa uma e uma só linha, e há três pontos que não são colineares.
3) O seguinte modelo verifica A_2, A_3, mas não verifica A_1 (porque os pontos 1 e 3 não definem uma linha).
Pontos: $\mathcal{E} = \{1, 2, 3\}$
Linhas : $\mathcal{L} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

Problema 4. *As figuras seguintes exibem graficamente planos de incidência finitos. Identifique os pares de planos de incidência isomorfos.*



Solução:
Vamos numerar os diagramas e nomear os pontos:



Recordemos o que são planos isomorfos (pag. 18 do manual). Diz-se que dois planos de incidência são isomorfos se existe uma colineação entre eles, ou seja, uma bijecção $f : E_1 \to E_2$ tal que A, B, C são colineares em E_1 sse $f(A), f(B), f(C)$ são colineares em E_2.

Sendo que uma colineação é antes de mais nada uma bijecção, diagramas com números de pontos diferentes não podem ser isomorfos.

Diagramas com 3 pontos: apenas o diagrama 1. Diagramas com 4 pontos: diagramas 2, 3, 4. Diagramas com 5 pontos: diagramas 5 e 6.

No diagrama 3, os pontos A, B, C, são colineares. Nos diagramas 2 e 4 todas as linhas têm apenas 2 pontos. Então não há forma de obter um isomorfismo de 3 para 2 nem de 3 para 4 que preserve a colinearidade de A,B,C. Portanto o plano 3 não é isomorfo a qualquer dos outros dois.

O plano 2 e 4 são isomorfos. Como obter o isomorfismo? Imagine-se o seguinte movimento do diagrama 4: o ponto D desloca-se para o canto superior direito e o C para o canto superior esquerdo, sem que as linhas que unem os pontos se partam. No final a linha DC fica horizontal, a CB fica vertical, tal como a DA. As linhas DB e CA tornam-se diagonais e cruzam-se no desenho. Ou seja, obtivemos o diagrama 2.

Este exercício de imaginação leva-nos a considerar que o isomorfismo é simplesmente o que faz corresponder pontos com o mesmo nome: A a A, B a B, etc. Para verificar que está correcto, falta apenas verificar uma a uma que todas as colinearidades (que neste caso são apenas de dois pontos, num total de 6) são preservadas: por exemplo A e B são colineares no diagrama 2, e os pontos correspondentes A e B do diagrama 4 também o são. Mas na verdade colinearidades de dois pontos são trivialmente preservadas, porque pelo axioma $A1$ todos os pares de pontos, tanto em E_1 como em E_2 definem linhas. Sendo assim, só as colinearidades de três pontos podem levantar problemas, e neste exemplo não há nenhuma.

Já os planos 5 e 6 não são colineares, precisamente porque os pontos A, E, C são colineares no diagrama 6 e não existem três pontos colineares no diagrama 5, portanto não poderá existir uma colineação entre os dois planos de incidência.

Problema 5. *Mostre que $A-B-C$ sse $C-B-A$.*

Solução:

$A-B-C \Leftrightarrow |AB|+|BC|=|AC| \Leftrightarrow |BA|+|CB|=|CA| \Leftrightarrow |CB|+|BA|=|CA| \Leftrightarrow C-B-A$

Problema 6. *Seja l uma linha recta, f um sistema de coordenadas para l, e A, B, C pontos distintos de l. Mostre que $A-B-C$ sse $fA-fB-fC$.*

Solução: Para simplificar notações vamos fazer $a=fA, b=fB, c=fC$

Antes de mais consideremos o que significa "estar entre"quando nos referimos a números reais. Quando dizemos que $a-b-c$, queremos dizer que $a<b<c$ ou que $c<b<a$.

Queremos mostrar que $A-B-C$ sse $a-b-c$. Vamos fazer isto em duas fases. Assumimos uma das proposições como verdadeiras e mostramos que em consequência a outra tem que ser verdadeira.

Suponhamos então que $A-B-C$. Então $|AB|+|BC|=|AC|$, ou seja $|fB-fA|+|fC-fB|=|fC-fA|$, ou ainda

$$|b-a|+|c-b|=|c-a|$$

Queremos mostrar que isto implica $a-b-c$, ou seja, que implica uma das duas condições $a<b<c$ ou $c<b<a$.

Sendo a,b,c números reais distintos, sabemos que um dos três (e apenas um) estará entre os outros dois (isto é uma propriedade de quaisquer três números reais distintos, e não é algo que tenhamos que demonstrar a partir dos axiomas da geometria). Ou seja, sabemos que $a-b-c$, $b-a-c$, ou $a-c-b$. Vamos mostrar que apenas a primeira das condições é compatível com $A-B-C$.

Suponhamos que $b-a-c$. Isto pode acontecer de duas formas: $b<a<c$ ou $c<a<b$. Vamos assumir que é a primeira.

Então $|b-a|=a-b$, $|c-b|=c-b$, $|c-a|=c-a$. Então

$$|b-a|+|c-b|=|c-a| \Leftrightarrow a-b+c-b=c-a \Leftrightarrow a=b.$$

Mas isto é impossível pois sabemos que $a\neq b$ (porque são as imagens de pontos distintos por um sistema de coordenadas f)

De forma análoga podemos mostrar que todos os outros casos excepto $a-b-c$ são impossíveis (fica como exercício testar todos os casos). Então temos que ter $a-b-c$.

A segunda parte da demonstração consiste em assumir $a-b-c$ e provar que $A-B-C$.

Se $a-b-c$ então $a<b<c$ ou $c<b<a$. Vamos considerar o primeiro caso.

Então $|b-a|=b-a$, $|c-b|=c-b$, $|c-a|=c-a$. Então

$$|b-a|+|c-b|=b-a+c-b=c-a=|c-a|$$

Portanto

$$|b-a|+|c-b|=|c-a|$$

mas isto é a definição de $A-B-C$.

Falta agora mostrar o mesmo para o caso $c<b<a$. O procedimento é análogo e fica como exercício.

Problema 7. *O semiplano de Poincare é o plano seguinte: os pontos são os pontos ordinarios de* $\mathbb{R}^2$ *com ordenada positiva,* $\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$ *e as linhas podem ser de dois tipos:*

Tipo I: são as intersecções com X *de linhas rectas verticais ordinárias, isto é, conjuntos da forma* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=c, y>0\}$.

Tipo II: são as intersecções com X *de circunferências ordinárias de* $\mathbb{R}^2$ *com centro sobre o eixo dos* xx*, isto é, conjuntos da forma* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+y^2=r^2, y>0\}$*, com* a *real e* r *real positivo.*

(a) Mostre que o semiplano de Poincaré é modelo dos axiomas de incidência, mas não é plano afim. Neste plano é válido o

AXI'OMA HIPERBOLICO DE PARALELISMO:

Para toda a linha l e todo o ponto $P \notin l$, existem, pelo menos, duas paralelas a l passando por P.

(b) Determine a única linha que passa pelos pontos $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 1)$, e indique duas paralelas a essa linha.

Solução: Vamos mostrar que se verifica cada um dos axiomas de incidência.

A_1: Sejam $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$. Vamos mostrar que existe uma e uma única recta que passa por P e Q. Se $x_1 = x_2$ então a recta vertical $x = x_1$ é a única recta vertical que atravessa os dois pontos. Além disso não existe uma circunferência com centro no eixo dos xx que o faça. Isto é evidente geometricamente, porque o arco de circunferência passa apenas uma vez por cada valor de abcissa, mas consideremos uma demonstração analítica: se uma circunferência passa por dois pontos $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$, os valores de r e a são tais que verificam o sistema

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + y_1^2 & = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + y_2^2 & = r^2 \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 & = r^2 \\ x_2^2 - 2ax_2 + a^2 + y_2^2 & = r^2 \end{cases}$$

No caso em que $x_1 = x_2$, subtraindo a segunda à primeira equação obtemos

$$y_1^2 = y_2^2$$

Como os valores de y não podem ser negativos, temos que $y_1 = y_2$. Portanto $P = Q$, o que é absurdo.

Consideremos agora o caso em que $x_1 \neq x_2$. Obviamente que os dois pontos não estão contidos numa mesma linha de tipo I. Quanto a uma circunferência, voltando a considerar o sistema acima referido, e subtraindo as duas equações obtemos um valor único para o centro a:

$$a = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

este valor de a pode ser substituido na primeira equação para obter o raio:

$$r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2},$$

portanto existe uma única circunferência com centro no eixo dos xx que passa por P e Q.

Os axiomas A_2 e A_3 seguem directamente das propriedades do plano euclideano.

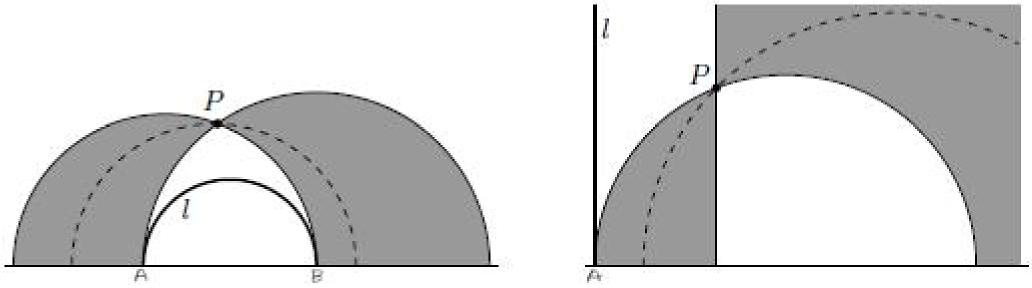


Figura 1: Paralelas à linha l passando por P

Falta mostrar que não se trata de um plano afim, e que em vez disso segue o axioma hiperbólico de paralelismo.

Consideremos então um ponto P e uma linha l com $P \in l$. Vamos mostrar que há um número infinito de linhas paralelas a l que passam por P, e que essas linhas estão contidas numa região entre duas paralelas específicas.

A demonstração depende do tipo de linha em causa (ver figura 1).

Se a linha é do tipo II (uma semi-circunferência), então procedemos da seguinte forma (figura 1 (esquerda)): Suponhamos que o ponto P está do lado de fora da circunferência. sejam A e B os pontos onde a circunferência intersecta o eixo dos xx. Existe uma única circunferência que passa por A e por P e que tem centro no eixo dos xx. Seja essa a linha l_A. Existe uma única circunferência que passa por B e por P e que tem centro no eixo dos xx. Seja essa a linha l_B. As linhas l_A e l_B passam por P e são paralelas a l (recordar que os pontos do eixo dos xx não fazem parte do plano). Mais do que isso, a região entre l_A e l_B (sombreada na figura) é coberta por uma infinidade de linhas de tipo II que passam por P e são paralelas a l. Se escolher qualquer ponto C entre A e o ponto mais à esquerda da zona sombreada no eixo dos xx, existirá uma única circunferência que passa por C e P. Fazendo isto para todas as escolhas de C obtenho todas as circunferências referidas. O caso em que P está dentro da circunferência fica ao cuidado do leitor.

O caso em que a linha é de tipo I é semelhante (figura 1 (direita)). As linhas paralelas estão contidas entre duas paralelas particulares, a saber: a recta vertical que passa por P; a única linha de tipo II que passa por P e pelo ponto de intersecção de l com o eixo dos xx. Todas as outras paralelas são do tipo II, correspondendo às circunferências que passam por P e por um ponto no eixo dos xx localizado entre a recta l e a projecção de P.

(b)

Os pontos P e Q não têm a mesma abcissa. Sendo assim temos que encontrar uma linha de tipo II que os atravessa. O trabalho já foi feito acima. Basta substituir $P = (x_1, y_1) = (1, 2)$ e $Q = (x_2, y_2) = (3, 1)$ nas expressões

$$a = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2},$$

Obtemos $a = 5/4$ e $r = 3\sqrt{7}/4$.

Problema 8. *Diga, justificando, se a intersecção de conjuntos convexos é convexa.*

Solução: A proposição é verdadeira. Sejam $X_i, i \in I$ uma família de conjuntos convexos (note-se que o número de elementos de I pode ser infinito). Seja $X = \cap_{\imath \in I} X_i$ a sua intersecção, ou seja, o conjunto de pontos comuns a todos os X_i. Vamos mostrar que, para quaisquer pontos A e B de X, o segmento $\overline{AB}$ está em X.Sejam A e B dois pontos de X. Então A e B pertencem a todos os X_i. Seja $\overline{AB}$ o segmento definido por A e B. Para cada $i \in I$, $\overline{AB}$ está contido em X_i, pois X_i é convexo. Então $\overline{AB}$ está contido na intersecção X dos X_i. Então X é convexo.

Problema 9. *Diga, justificando, se a união de conjuntos convexos é convexa.*

Solução: A proposição é falsa. Para prová-lo, basta-nos encontrar um contra-exemplo.

Por A_3, sabemos que existem três pontos não colineares, A, B, C.

Consideramos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Sabemos que ambos os segmentos são convexos.

Consideramos o conjunto X, união de $\overline{AB}$ com $\overline{BC}$. Será que X é convexo?

Consideramos os pontos A e C, ambos em X. Então o segmento $\overline{AC}$ tem pelo menos um ponto que não está em X. Na verdade os únicos pontos de $\overline{AC}$ que estão em X são os extremos A e C. Por absurdo, suponhamos que há um ponto D, interior a $\overline{AC}$, que está em X. Então está num dos segmentos $\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que D está no segmento $\overline{AB}$ (se estiver em $\overline{BC}$ a demonstração é similar). Então D está na recta $\overleftrightarrow{AB}$ e na recta $\overleftrightarrow{AC}$. Então por A_1, as rectas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são iguais porque ambas passam pelos pontos A e D. Então A, B, C são colineares, o que é absurdo. Portanto o interior do segmento $\overline{AC}$ não intersecta X. Em particular há um ponto do segmento $\overline{AC}$ que não está em X, pelo que X não é convexo.

Problema 10. *Recorde que um quadrilátero diz-se convexo se cada lado está contido num semiplano limitado pelo lado oposto. Mostre que:*

a) Um quadrilátero é convexo sse o vértice de cada ângulo é interior ao ângulo oposto.

b) as diagonais de um quadrilátero convexo cortam-se num ponto.

Solução: a) Seja $\square ABCD$ um quadrilátero convexo. Vamos mostrar que $C \in int(\angle A)$ (para os outros pontos a demonstração é simétrica). Como o quadrilátero é convexo, $\overline{CD}$ está contido num dos lados do semiplano definido por $\overleftrightarrow{AB}$, portanto C e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Da mesma forma, C e B estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AD}$, pelo que $C \in int(\angle A)$.

Recíprocamente, suponhamos que o vértice de cada ângulo é interior ao ângulo oposto. Então $C \in int(\angle A)$, portanto B e C estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AD}$, portanto $\overline{BC}$ está contida num dos lados do semiplano definido por $\overleftrightarrow{AD}$. O mesmo pode ser dito em relação aos outros vértices. Então $\square ABCD$ é um quadrilátero convexo.

b) Considere-se um quadrilátero convexo $\square ABCD$. Pela alínea a) sabemos que $C \in int(\angle(A))$. Então, pelo teorema da barra transversal, $\overrightarrow{AC}$ corta $\overline{BD}$ num ponto P tal que $B - P - D$. Da mesma forma, $\overrightarrow{BD}$ corta $\overline{AC}$ num ponto Q tal que $A - Q - C$. Se P e Q fossem distintos então, como ambos pertencem às linhas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, teríamos $\overleftrightarrow{AC}$=$\overleftrightarrow{BD}$. Mas como estas linhas são distintas, então $P = Q$.