ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 22 de novembro a 2 de dezembro de 2109

Data de Limite de Entrega

2 de dezembro de 2109, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes. Espaços Vetoriais.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a IV têm cotação de 1 valor cada.

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em pdf devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato pdf a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

☐ **a)** $AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$

☐ **c)** $CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ **b)** $AC = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

☐ **d)** $ACA = \begin{pmatrix} 21 & 32 & 10 & 1 \\ 43 & 64 & 22 & -1 \end{pmatrix}$

2. Seja $\mathbb{R}_3[x]$ o espaço vetorial dos polinómios de grau menor ou igual a 3 na variável x. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}_3[x]$:

$$A = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = p(x+1)\right\},$$
$$B = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : \left(p(0)\right)^2 + 2\left(p(1)\right)^2 + \left(p(2)\right)^2 = 0\right\},$$
$$C = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0 \text{ e } p(1) = 0\right\},$$
$$D = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0 \text{ ou } p(1) = 0\right\}.$$

Então:

☐ **a)** A, B, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **b)** Só A, B e C são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **c)** Só A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **d)** Só A é subespaço vetorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

3. Sejam $A, B \in \mathscr{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 3$ e $\det B = 2$, e considere as seguintes afirmações:

i) $\det(A+B) = 5$

iii) $\det(BA) = 5$

ii) $\det(BA^2) = 18$

iv) $\det(B^2A) = 8$.

Então

☐ **a)** Todas as afirmações são falsas.

☐ **b)** Todas as afirmações são verdadeiras.

☐ **c)** A afirmação ii) é verdadeira.

☐ **d)** A afirmação i) é verdadeira.

4. Seja $A \in \mathscr{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz

$$A \xrightarrow[\ell_3 \leftrightarrow \ell_2]{} A_1 \xrightarrow[\ell_3 + 2\ell_1]{} I_3 \ ,$$

para uma certa matriz A_1.

Então

☐ **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ **c)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ **b)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

☐ **d)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere o sistema

$$\begin{cases} \ \ ax + by + cz + dw = p \\ -bx + ay + dz - cw = q \\ -cx - dy + az + bw = r \\ -dx + cy - bz + aw = s \end{cases}$$

nas variáveis x, y, z e w.

i) Mostre justificadamente que este sistema possui uma solução única se e sómente se $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

ii) Utilize a Regra de Cramer para mostrar que nesse caso

$$y = \frac{bp + aq - dr + cs}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \ .$$

III. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Mostre justificadamente (i.e., indicando clara e detalhadamente as propriedades que utiliza) que o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} x+y+z & x+y & x & x \\ x+y & x+y+z & x & x \\ x & x & x+y+z & x+y \\ x & x & x+y & x+y+z \end{pmatrix}$$

é igual a $z^2(2y+z)(4x+2y+z)$.

IV. Seja $A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $A^{2020} + A^{2019} = I_2$.

i) Mostre justificadamente que A é invertível.

ii) Mostre justificadamente que $\det(I_2 + A) \neq 0$.

FIM