Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

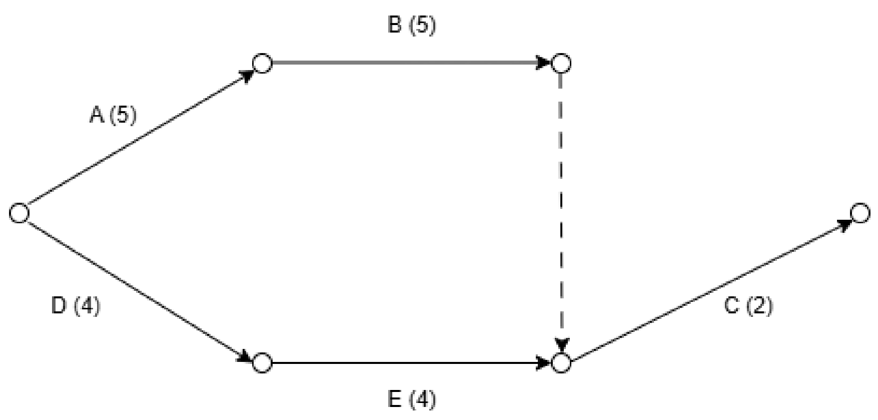
Decorre de 11 a 19 de Maio de 2024

Enunciado

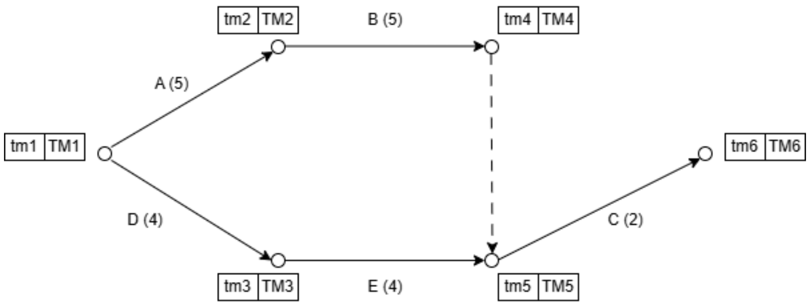
1. Considere um projeto com as atividades A, B, C, D, E. Na tabela seguinte apresentam-se as precedências e a duração (em dias) de cada uma das atividades.

Atividades	Precedências	Duração (dias)
A	—	5
B	A	5
C	B, E	2
D	—	4
E	D	4

a) (0.2 val.) Desenhe a rede do projeto.
Resolução:



b) (0.5 val.) Indique a duração do projeto. Qual o caminho crítico? Justifique.
Resolução:



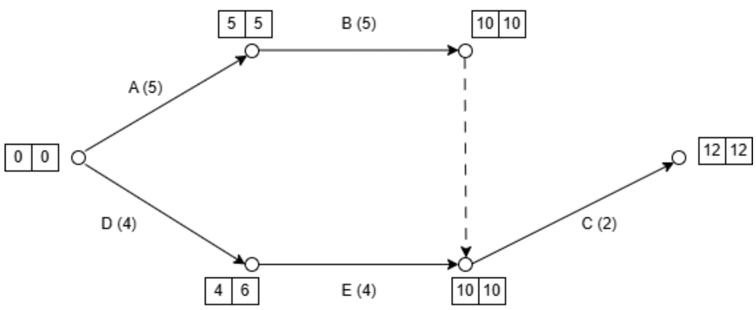
Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 5 = 5$
$tm_3 = tm_1 + 4 = 4$
$tm_4 = tm_2 + 5 = 10$
$tm_5 = \max\{tm_3 + 4, tm4\} = \max\{8, 10\} = 10$
$tm_6 = tm5 + 2 = 12$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_6 = 12$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 2 = 10$
$TM_4 = TM_5 = 10$
$TM_3 = TM_4 - 4 = 6$
$TM_2 = TM_4 - 5 = 5$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 5, TM_3 - 3\} = \min\{0, 2\} = 0$

Conclui-se assim que a duração total do projeto é 12 unidades de tempo.

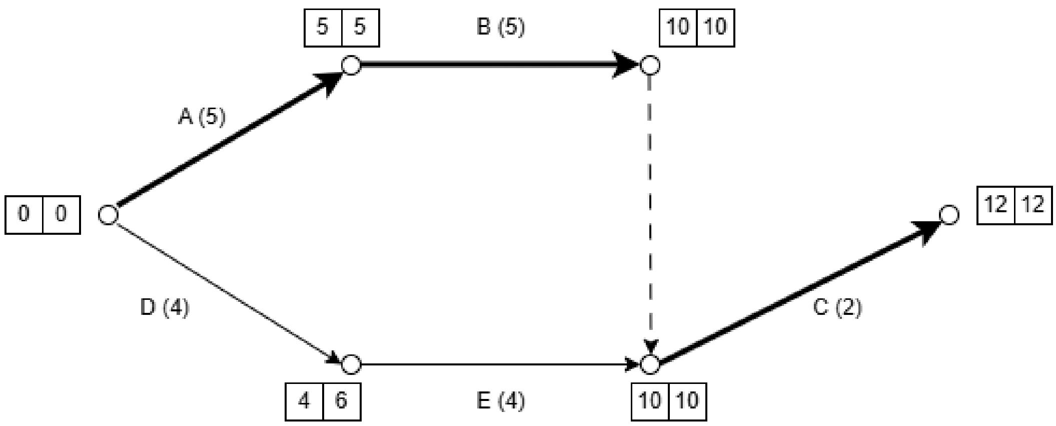
Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



Os nós críticos são os nós em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 5 nós críticos: 1, 2, 4, 5 e 6. As atividades que unem estes nós são candidatas a atividades críticas. Para serem atividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da atividade (para não haver folgas).

Atividade	tm(i+1)-tm(i)	Duração	Conclusão
A	$tm_2 - tm_1 = 5$	5	atividade crítica
B	$tm_5 - tm_2 = 10 - 5 = 5$	5	atividade crítica
C	$tm_6 - tm_5 = 12 - 10 = 2$	2	atividade crítica

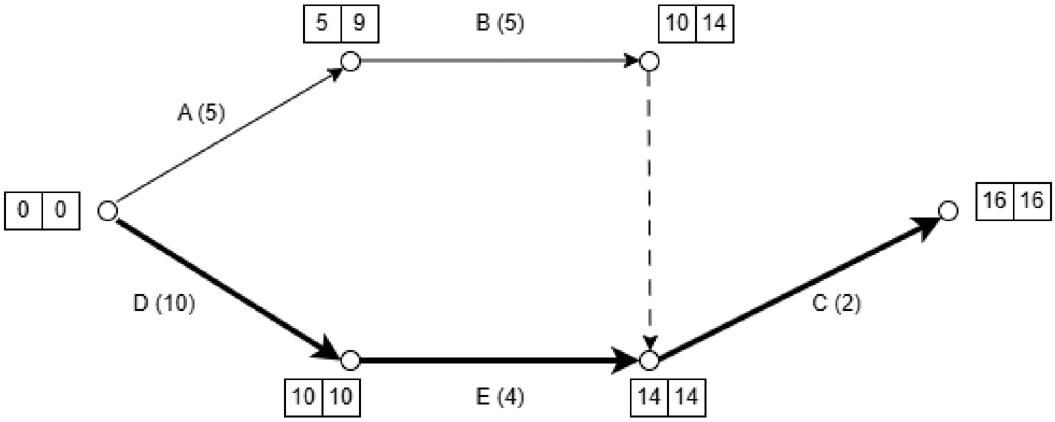
Conclui-se que as atividades A, B e C são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas atividades A, B e C.



c) (0.5 val.) A atividade D é executada no exterior e sofreu um atraso na sua execução de 6 dias. Quais as consequências para a conclusão do projeto?

Resolução:

A atividade D sofreu um atraso de 6 dias, logo a sua duração passa a ser de 10 dias. Refaz-se os cálculos anteriores e obtém-se que a duração do projeto passa a ser de 16 dias e que as atividades críticas são D, E e C.

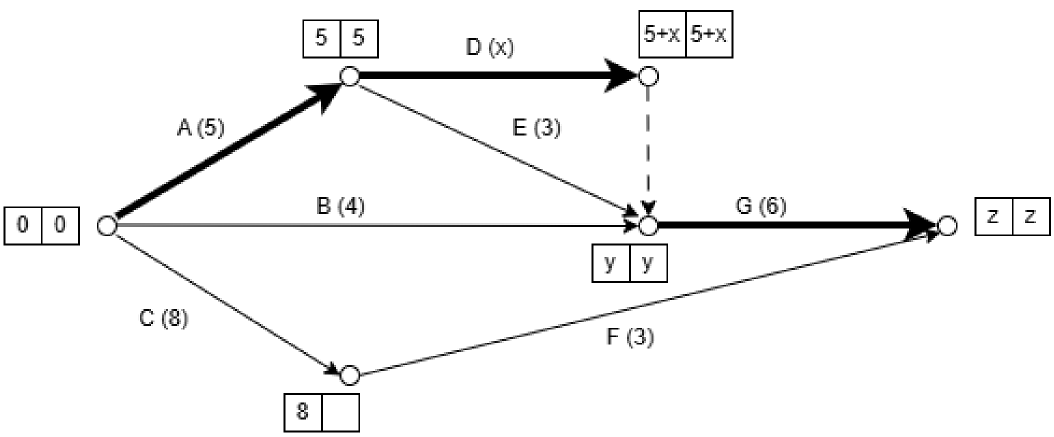


2. (0.8 val.) Considere um projeto com as atividades A, B, C, D, E, F e G. Na tabela seguinte apresentam-se as precedências e a duração (em dias) de cada uma das atividades.

Atividades	Precedências	Duração (dias)
A	—	5
B	—	4
C	—	8
D	A	x
E	A	3
F	C	3
G	B, D, E	6

A atividade D tem uma duração desconhecida $x \in \mathbb{N}$. Indique todos os valores possíveis para x de modo a que o caminho crítico seja A-D-G.

Resolução:



Acima encontra-se a rede para o projeto descrito. Como A, D e G são atividades críticas então os nós de início e fim das atividades têm os tempos mais cedo iguais aos tempos mais tarde.

Nomeadamente, temos que

$$\begin{aligned} y &= \max\{5+x, 8, 4\} = \max\{5+x, 8\} \\ z &= \max\{y+6, 11\} \end{aligned}$$

Se $x+5 \leq 8$, então $y = 8$, pelo que A e E seriam atividades críticas, o que é falso (E não é atividade crítica). Logo, concluímos que $x+5 > 8 \Leftrightarrow x > 3$ e, portanto, $y = x+5$.

É necessário que $\max\{x+5+6, 11\} = 11$, o que é sempre verdade para $x > 3$.

Temos de garantir que os tempos mais cedo e mais tarde no nó final da atividade A são iguais, ou seja:

$$5 = \min\{5+x-x, y-3\} = \min\{5, x+5-3\} \min\{5, x+2\},$$

que é verdade visto que $x > 3$, logo, $x+2 > 5$.

Assim, temos que $x \geq 4$.

3. Considere um serviço em que o processo de chegadas de clientes é Poissoniano com taxa média de uma chegada a cada 10 minutos. A duração de um atendimento pode considerar-se com distribuição exponencial com valor médio igual a 8 minutos. O sistema funciona com um servidor e não pode receber mais do que 5 clientes.

a) (0.2 val.) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado.

Resolução:

Trata-se de um sistema $M/M/1/5$ (População=∞, Fila máxima=5-1=4): tanto o processo de chegada de clientes como do tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos, o número de servidores é $S = 1$ e o número máximo de clientes no sistema é $k = 5$.

Processo de chegadas Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = 1/10$ clientes por minuto (1 cliente de 10 em 10 minutos, ou seja, 6 cientes por hora).

Duração do serviço com distribuição Exponencial Negativa com taxa de atendimento de $\mu = 1/8$ clientes por minuto.

Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) (0.5 val.) Determine o número médio de clientes por hora impedidos de entrar no serviço.

Resolução:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{4^6}{5^6}} = \frac{1}{5}\frac{5^6}{5^6-4^6} = \frac{5^5}{5^6-4^6}$$

$$P_5 = \rho^K P_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \frac{5^5}{5^6-4^6} = \frac{4^5 5^5}{5^5(5^6-4^6)} = \frac{4^5}{5^6-4^6}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda(1-P_5) = \frac{1}{10}\left(1-\frac{4^5}{5^6-4^6}\right) \sim 0.09112$$

$$\lambda - \overline{\lambda} = \lambda - \lambda(1-P_5) = \lambda - \lambda + \lambda P_5 = \lambda P_5 = \frac{1}{10}\frac{4^5}{5^6-4^6} \sim 0.008882 min^{-1}$$

Assim, o número médio de clientes impedidos de entrar é $0.008882 \times 60 \sim 0.533$ clientes/h.

c) (0.4 val.) Determine o comprimento médio da fila.

Resolução:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} - \frac{6\left(\frac{4}{5}\right)^6}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6} = 4 - \frac{6.4^6}{5^6-4^6}$$

$$L_q = L - \frac{\overline{\lambda}}{\mu} = 4 - \frac{6.4^6}{5^6-4^6} - \frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{4^5}{5^6-4^6}\right)}{\frac{1}{8}} \sim 1.139 clientes$$

d) (0.5 val.) Qual o tempo, em média, que cada cliente passa no serviço? E na fila de espera?

Resolução:

Tempo médio no serviço:

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}} = \frac{L}{\lambda(1-P_5)} = \frac{4-\frac{6.4^6}{5^6-4^6}}{\frac{1}{10}\left(1-\frac{4^5}{5^6-4^6}\right)} \sim 20,5 min$$

Tempo médio na fila de espera:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} \sim 12,5min$$

e) (0.4 val.) Assuma agora que o sistema tem 2 servidores. Qual a probabilidade de não haver clientes no sistema?

Resolução:

Tipo de sistema de fila de espera: M/M/S=2/K=5

$$\lambda = \frac{1}{10}, \qquad \mu = \frac{1}{8}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5} < 1$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left[\frac{S^S \rho^{S+1}(1-\rho)^{K-S}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{2^2\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(1-\frac{4}{5}\right)^3}{2!\left(1-\frac{4}{5}\right)} + \sum_{n=0}^{2} \frac{\left(2\times\frac{4}{5}\right)^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{2.\frac{4^3}{5^3}.\frac{1}{5^3}}{\frac{1}{5}} + 1 + \frac{8}{5} + \frac{\frac{2^6}{5^2}}{2}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{2.4^3.5}{5^6} + 1 + \frac{8}{5} + \frac{2^5}{5^2}\right]^{-1} \sim 25.5\%
\end{aligned}$$

FIM