ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 17 a 27 de novembro de 2107

Data de Limite de Entrega

27 de novembro de 2107, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes. Espaços Vetoriais.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a V têm cotação de 0.75 valores cada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em pdf devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato pdf a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. No espaço vetorial $\mathbb{R}_3[x]$ considere os seguintes subconjuntos:

$$A = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(0)\},$$
$$B = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$C = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) + p(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\},$$
$$D = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(x) - p(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Então:

☐ **a)** Os conjuntos A, C e D são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **b)** Apenas C é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **c)** Apenas os conjuntos A e B são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}_3[x]$.

☐ **d)** Apenas o conjunto A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

2. Considere as matrizes A e B definidas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Então

☐ **a)** $A^2 = 0$

☐ **c)** $BA = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

☐ **b)** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☐ **d)** $AB = BA$

3. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2, \det B = 3$ e $\det C = 4$.

Então

☐ **a)** $\det(-AB) = 6$.

☐ **b)** $\det(-BA) = -6$.

☐ **c)** $\det(-A^{-2}CB) = 3$.

☐ **d)** $\det(A + B + C) = 9$.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A+B) = -2$.

Então

- ☐ **a)** $\det A = \det B - 2$.
- ☐ **b)** $\det A = \det(-B) - 2$.
- ☐ **c)** $\det(-(A+B)^{-1}) = -1/2$.
- ☐ **d)** $\det(-(A+B)) = -1/2$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -2x + ny + z = 1 \\ y + 7z = 2 \end{cases}$$

onde n representa o seu número de aluno.

Verifique (após substituir n pelo seu número de aluno!) que este sistema possui uma solução única, e utilize a Regra de Cramer para calcular y.

III. 1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, e considere o determinante

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Mostre justificadamente (indicando as propriedades utilizadas) que

$$V = (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e portanto que $V = (b-a)(c-a)(c-b)$.

2. Procedendo de forma semelhante, mostre que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

se pode escrever como um produto de 6 fatores do mesmo tipo que os da alínea anterior.

Sugestão: Recorde que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

IV. Considere a matriz aumentada de um sistema de equações lineares dada por $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & b \\ 0 & b & a & 1 \\ a & b & 4 & 3 \end{array}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Determine os valores dos parâmetros a e b para os quais

i) O sistema tem solução única.

ii) O sistema é indeterminado.

iii) O sistema não tem solução.

Se possível, indique em cada caso as soluções.

V. Determine todas as matrizes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que $M^2 = I_2$.

FIM