Derivadas de funções reais de variável real

O conceito de derivada tem grande importância pelas suas inúmeras aplicações em Matemática, em Física e em muitas outras ciências.

Neste capítulo vamos dar a definição de derivada de uma função num ponto, algumas propriedades básicas, bem como as regras de derivação.

Como vão poder constatar, depois de aprendidas as regras de derivação que vamos dar, é muito fácil aplicar essas regras a qualquer função das que estudaram no capítulo das Funções.

Definição 1.

Seja f uma função real e a um ponto do seu domínio.

Chama-se derivada da função *no ponto* a e representa-se por $f'(a)$ o seguinte:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemplo 1.

Seja $y = f(x) = x^2$ e seja $a = 1$. Queremos calcular $f'(1)$.

Começamos por calcular $f(1)$ fazendo $x = 1$ em x^2. Obtém-se $f(1) = 1$.

Então, por definição, vem $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

Nota: A passagem de $x^2 - 1$ para $(x - 1)(x + 1)$ (corresponde a uma decomposição em factores) foi feita recorrendo ao caso notável da multiplicação: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Exemplo 2.

Considerar a mesma função $f(x) = x^2$. Vamos considerar agora o ponto $a = 2$. Queremos calcular $f'(2)$.

Começamos por calcular $f(2)$ fazendo $x = 2$ em x^2. Obtém-se $f(2) = 4$.

Então, por definição, vem $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$.

Exercício 1.

Ainda para a função $f(x) = x^2$, calcule:

a) $f'(-1)$ e verifique que obtém -2.

b) $f'(-2)$ e verifique que obtém -4.

Exemplo 3.

Seja $y = f(x) = x^2 - 1$ e seja $a = 1$. Queremos calcular $f'(1)$.

Começamos por calcular $f(1)$ fazendo $x = 1$ em $x^2 - 1$. Obtém-se $f(1) = 1 - 1 = 0$.

Então, por definição, vem $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$.

Exemplo 4.

Considerar a mesma função $f(x) = x^2 - 1$. Vamos considerar agora o ponto $a = 2$. Queremos calcular $f'(2)$.

Começamos por calcular $f(2)$ fazendo $x = 2$ em $x^2 - 1$. Obtém-se $f(2) = 4 - 1 = 3$.

Então, por definição, vem $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-1-3}{x-2} \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$ $\lim_{x\to 2}(x+2) = 4$.

Exercício 2.

Ainda para a função $f(x) = x^2 - 1$, calcule:

a) $f'(-1)$ e verifique que obtém -2.

b) $f'(-2)$ e verifique que obtém -4.

Exercício 3.

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $f'(-1)$ e $f'(1)$.

Pode calcular-se $f'(0)$? Porquê?

Definição 2.

Diz-se que uma função *f* é *diferenciável num ponto* a do seu domínio se $f'(a)$ for um número real.

Nem todas as funções são diferenciáveis em pontos do seu domínio. Não vamos demostrar, mas por exemplo a função módulo, que estudou no capítulo das Funções, $g(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$. Esta função é uma função que se define por ramos:

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Neste capítulo não nos vão interessar funções deste tipo. Só nos vão interessar funções "bem comportadas", ou seja, funções diferenciáveis.

As funções com que vamos trabalhar são funções do tipo:

- Polinomiais (Exemplo: $f(x) = 3x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 4$)
- Racionais (Exemplo: $f(x) = \frac{x^4+x}{x^2+1}$)
- Irracionais (Exemplo: $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$)
- Exponenciais (Exemplo: $f(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$)
- Logarítmicas (Exemplo: $f(x) = log(2x)$)
- Trigonométricas (Exemplo: $f(x) = 3sen(2x+1) + tgx$)

Nota: No capítulo das Funções foram estudadas as Potências e os Logaritmos.

Chamamos potência a uma expressão do tipo x^5 ou do tipo 3^x; esta última potência tem base 3 e expoente x (x pode ser um número real qualquer). À função $f(x) = 3^x$ é usual chamar-se

função exponencial. Uma função exponencial muito utilizada é a que tem por base o número irracional que se designa por e: $f(x) = e^x$ (e é o número de Neper, um número irracional cujo valor é e = 2,7182818284590452353...). Em breve veremos por que é vantajoso trabalhar com esta função exponencial de base e.

Quando pretendemos resolver a equação $3^x = 81$, já sabemos que $x = log_3 81 = 4$ (porque $3^4 = 81$). Chamamos ***função logarítmica*** a uma função do tipo $y = log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$). Se utilizarmos a base e, a função logarítmica dessa base é habitualmente representada por $y = lnx$. Por outro lado $y = logx$ é habitualmente usada para o logaritmo de base 10. **Neste capítulo, caso nada seja dito em contrário, quando nos referimos a $y = lnx$ estamos sempre a pensar na base e.**

Definição 3.

A notação para a derivada $f'(a)$ sugere que se pode pensar na derivada como uma função. O facto de a cada ponto a em que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe (i.e., é um número real), estar associado um número real, $f'(a)$, fica definida uma função cujo domínio é um subconjunto do domínio de f.

Esta nova função é designada por *função derivada* ou *derivada* de $f(x)$. Representa-se por $f'(x)$, ou y' (com $y = f(x)$).

Esquematicamente, para todo o x em que a função é diferenciável:

$$x \to y' = f'(x)$$

Ao processo de achar derivadas chama-se *derivação* ou *diferenciação*. Nos exemplos dados mostrámos como calcular derivadas recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Nesta secção iremos fornecer as regras que permitem efectuar o cálculo de derivadas (ou de funções derivadas) de um grande número de funções.

Os resultados que apresentamos não vão ser demonstrados, mas podem sê-lo a partir da Definição 1. e recorrendo a métodos de cálculo de limites.

Vamos começar por dar um conjunto de **regras de derivação** muito utilizadas:

1. Derivada de uma constante: *c'*=0 (*c* é um número real qualquer).

Em linguagem corrente, diz-se que a derivada de uma constante é zero.

Exemplo 3. A derivada de 1 é 0.

Exemplo 4. A derivada de 1000 é 0.

Exemplo 5. A derivada de 0,002 é 0.

Exemplo 5. A derivada de π é 0.

Exercício 4.

Calcule as derivadas seguintes:

a) 5
b) $\frac{1}{3}$
c) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
d) $2e$
e) $\pi - 4e$

2. Derivada da função identidade: *x'*=1

Em linguagem corrente, diz-se que a derivada de x é um.

3. Derivada da potência: $(x^n)' = nx^{n-1}$ em que n é um número **real** qualquer.

Se em particular se fizer $n = 1$, o que se pretende derivar é x. Por aplicação da regra da potência, obtém-se $(x^1)' = 1\,x^{1-1} = x^0 = 1$. Ou seja, a regra da derivada da função identidade é um caso particular da regra da derivada da potência.

Exemplo 6. A derivada de x^2 é dada por $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.

Exemplo 7. A derivada de x^3 é dada por $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$.

Exemplo 8. A derivada de x^4 é dada por $(x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Exemplo 9. A derivada de $\frac{1}{x} = x^{-1}$ é dada por $(x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Nota: Recordar o significado de potência de expoente negativo: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$, com $a > 0$ e b um número real qualquer.

Exemplo 10. A derivada de $\sqrt{x} = x^{1/2}$ é dada por $\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nota: Recordar como se transforma uma raiz de um índice qualquer numa potência: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ou mais genericamente, $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$. Assim, a derivada de $\sqrt[n]{a^m}$ (ou de $a^{m/n}$) é

$$\left(a^{m/n}\right)' = \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}$$

4. Derivada da função exponencial: $(e^x)' = e^x$.

Nota: A função $f(x) = e^x$ é a única função cuja derivada é igual a ela própria! Se quisermos calcular a derivada de 3^x teremos que começar por transformar esta potência de base 3 noutra de base e. Essa mudança de base faz-se à custa da fórmula: $\boxed{a^x = e^{xlna}}$

Mais adiante iremos dar exemplos de aplicação em que esta expressão vai ser utilizada.

5. Derivada da função logarítmica: $(lnx)' = \frac{1}{x}$.

Nota: No âmbito deste curso só iremos tratar de derivadas de funções logarítmicas de base e.

6. Derivada da função seno: $(senx)' = \cos x$.

7. Derivada da função cosseno: $(cosx)' = -senx$

Em resumo:

- $c'=0$ ($c \in \mathbb{R}$)
- $x'=1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ com $n \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(lnx)' = \frac{1}{x}$
- $(senx)' = \cos x$
- $(cosx)' = -senx$

Vamos agora apresentar as **regras algébricas de derivação** indispensáveis no cálculo de derivadas de outros tipos de funções.

Sejam f e g funções diferenciáveis no ponto *a* do domínio de ambas as funções e seja também c uma constante real qualquer. Então as funções $c \cdot f, f + g, f \cdot g$ e $(se\ g(a) \neq 0)\ f/g$ também são diferenciáveis em *a* e as suas derivadas são dadas por:

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
2. $(f + g)' = f' + g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{(g)^2}$ nos pontos em que $g \neq 0$

Cada uma destas regras, em linguagem corrente, lê-se, respectivamente, da seguinte forma:

1. A derivada do produto de uma constante (*c*) por uma função (*f*) é igual ao produto da constante pela derivada da função.
2. A derivada da soma (ou da diferença) de duas funções (*f* e *g*) é igual, respectivamente, à soma (ou à diferença) das derivadas das funções.
3. A derivada do produto de duas funções (*f* e *g*) é igual à soma do produto da derivada da 1ª (função *f*) pela 2ª (função *g*) com o produto da 1ª pela derivada da 2ª.
4. A derivada do quociente de duas funções (*f* e *g*) (com $g \neq 0$) é igual ao quociente de:
    - a diferença do produto da derivada da 1ª (função *f*) pela 2ª (função *g*) e o produto da 1ª pela derivada da 2ª: $f'g - f \cdot g'$
    - e o quadrado da 2ª: $g^2 = (g)^2$, se $g \neq 0$.

A regra da derivada da soma e a do produto podem aplicar-se a mais que duas funções:

- $(f + g + h)' = f' + g' + h'$

- $(f \cdot g \cdot h)' = \left((f \cdot g) \cdot h\right)' = (f' \cdot g + f \cdot g') \cdot h + f \cdot gh'$

Por processo idêntico, podem generalizar-se estas regras de derivação para quatro ou mais funções, diferenciáveis em pontos da intersecção dos domínios dessas funções.

Agora juntando estas regras com as que demos anteriormente, podemos já derivar mais tipos de funções, como vamos ver nos exemplos que se seguem.

Exemplo 11. A derivada de $4x$ é 4, porque $(4x)' = 4(x)' = 4 \cdot 1 = 4$. Aplicámos a regra do produto de uma constante (4) pela função identidade (x).

Também podemos chegar ao mesmo resultado começando por aplicar a regra de derivação do produto: $(4x)' = 4'x + 4x' = 0 + 4 = 4$. Como pode verificar este processo é um pouco mais demorado, mas está correcto! Opte pelo processo que mais lhe agradar, mas lembre-se que é mais rápido utilizar a regra $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

Exemplo 12. A derivada de $-x$ é -1, porque $(-x)' = -1(x)' = -1 \cdot 1 = -1$.

Exemplo 13. A derivada de $-2x^3$ é $-6x^2$, porque $(-2x^3)' = -2(x^3)' = -2 \cdot 3x^2 = -6x^2$.

Exemplo 14. A derivada de $senx + lnx$ é $(senx + lnx)' = (senx)' + (lnx)' = cosx + \frac{1}{x}$.

Exemplo 15. Vamos calcular a derivada de $g(x) = 3x + 5$. Começamos por ver que $u(x)$ é a soma de $3x$ com 5. Pela regra da derivação da soma, tem-se $(3x + 5)' = (3x)' + 5'$. Como $(3x)' = 3$ e $5' = 0$, vem $u'(x) = 3$.

Exercício 5.

Calcule a derivada de $h(x) = 7x + 15$.

Exercício 6.

Calcule a derivada de $-9e^x + x^8 - 2lnx$.

Exemplo 16. Pode calcular-se a derivada de $\frac{1}{x}$ para qualquer x excepto 0, por aplicação da regra da derivada do quociente: $\left(\frac{1}{x}\right)'' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Este resultado tinha sido já obtido no Exemplo 8., quando demos a regra da derivação de uma potência.

Exercício 7.

Tendo em atenção o Exemplo 16, calcule as derivadas seguintes:

a) $f(x) = \frac{2}{x+1}$
b) $g(x) = -\frac{1}{x}$
c) $h(x) = \frac{5}{x+\pi}$ (Lembre-se que π é um número irracional que vale *aproximadamente* 3,14).
d) $i(x) = \frac{3}{(2x+7)^4}$

Exemplo 17.

Dadas as funções $u(x) = 3x + 5$ e $v(x) = 7x + 15$. Pretende obter-se a função derivada de:

a) $f(x) = u(x) + v(x)$
b) $g(x) = u(x) - v(x)$
c) $h(x) = u(x) \times v(x)$
d) $i(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Resolução:

a) Como $f(x)$ é a soma de duas funções, então $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. Como $u'(x) = 3$ e $v'(x) = 7$, então $f'(x) = 3 + 7 = 10$.

Este resultado pode ser confirmado começando por realizar a soma indicada para obter $f(x)$ e, em seguida, derivar a função obtida:

$f(x) = u(x) + v(x) = 3x + 5 + 7x + 15 = 10x + 20$. Donde, $f'(x) = 10$.

b) Como $g(x) = u(x) - v(x) = u(x) + (-v(x)) = u'(x) + (-1)v'(x)$. Pela alínea a) sabe-se que $u'(x) = 3$ e $v'(x) = 7$, então $g'(x) = 3 - 7 = -4$.

c) Como $h(x)$ é o produto de duas funções, $h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 3\,(7x + 15) + 7\,(3x + 5) = 42x + 80$.

Este resultado pode ser confirmado começando por realizar o produto indicado para obter $h(x)$ e, em seguida, derivar a função obtida:

$h(x) = (3x + 5)(7x + 15) = 21x^2 + 80x + 75$. Donde, $h'(x) = (21x^2)' + (80x)' + 0 = 21(x^2)' + 80 = 21 \cdot 2x + 80 = 42x + 80$.

d) Como $i(x)$ é o quociente de duas funções, $i'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ para $v(x) \neq 0$, ou seja, para $x \neq -\frac{15}{7}$, vem $i'(x) = \frac{3(7x+15) - 7(3x+5)}{(7x+15)^2}$

Exemplo 18.

Para calcular $(tgx)'$ procedemos do seguinte modo:

$$(tgx)' = \left(\frac{senx}{cosx}\right)' = \frac{(senx)'cosx - senx(cosx)'}{(cosx)^2} = \frac{cosx \cdot cosx - senx(-senx)}{cos^2x}$$
$$= \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

É importante lembrar que a fórmula fundamental da Trigonometria é $sen^2x + cos^2x = 1$.

Exemplo 19.

Para calcular a derivada de $\frac{3x+1}{x^3-x}$ vamos começar por utilizar a regra da derivada do quociente e depois as outras regras necessárias:

$$\left[\frac{3x+1}{x^3-x}\right]' = \frac{(3x+1)'(x^3-x)-(3x+1)(x^3-x)'}{(x^3-x)^2} = \frac{3(x^3-x)-(3x+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} =$$

$$= \frac{3x^3-3x-(9x^3-3x+3x^2-1)}{(x^3-x)^2} = \frac{3x^3-3x-9x^3+3x-3x^2+1}{(x^3-x)^2} = \frac{-6x^3-3x^2+1}{(x^3-x)^2}$$

Exercício 8.

Calcule as seguintes derivadas:

a) $2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{5}x$

b) $-2lnx + \frac{4x}{x+1} + 3\pi$

c) $\frac{1}{2x} + xlnx$

d) $-2e^x + \frac{1}{4}x^{-2} + 3\sqrt[3]{x}$

e) $3senx - xcosx + \frac{x^4+x}{x^2-1}$.

Com as regras que demos até agora ainda não nos é possível calcular derivadas de muitas outras funções. Por exemplo, ainda não é possível calcular a derivada de $\sqrt{2x+1}$ ou de $(3x-2)^3$ e de muitas mais outras funções. Vamos agora dar um conjunto de regras que permitem calcular qualquer tipo de derivadas de funções (diferenciáveis).

Seja a função $u = u(x)$:

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ em que n é um número real
2. $(e^u)' = u'e^u$
3. $(lnu)' = \frac{u'}{u}$
4. $(senu)' = u' \cos u$
5. $(cos\, u)' = -u'senu$

Estas regras são a generalização das primeiras regras que demos. Pode comprovar-se fazendo $u = x$.

Em resumo, as **REGRAS DE DERIVAÇÃO** são:

- As primeiras regras:

$c'=0$ (c é um número real)

$x'=1$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (n é um número real)

$(e^x)' = e^x$

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

$(senx)' = \cos x$

$(cosx)' = -senx$

- As regras algébricas:

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$(f + g)' = f' + g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g\prime}{(g)^2}$ nos pontos em que $g \neq 0$

- As primeiras regras generalizadas ($u = u(x)$):

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ em que n é um número real (regra da derivada da potência)

$(e^u)' = u'e^u$ (regra da derivada da exponencial)

$(lnu)' = \frac{u\prime}{u}$ (regra da derivada do logaritmo)

$(senu)' = u' \cos u$ (regra da derivada do seno)

$(cos\, u)' = -u'senu$ (regra da derivada do cosseno)

Exemplo 20.

Vamos calcular a derivada de $(3x - 2)^3$. Pela regra da derivada da potência, vem

$$((3x - 2)^3)' = 3(3x - 2)^{3-1}(3x - 2)' = 3(3x - 2)^2 \cdot 3 = 9(3x - 2)^2$$

Exemplo 21.

Vamos calcular a derivada de $\sqrt{2x+1}$. Começamos por escrever $\sqrt{2x+1}$ na forma $(2x+1)^{1/2}$. Agora começamos por aplicar a regra da derivada da potência, seguida das outras regras necessárias (que deve identificar!):

$\left((2x+1)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}-1}(2x+1)' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Exemplo 22.

Vamos calcular a derivada de $f(x) = 3^x + \frac{ln(2x)}{x}$. Começamos por escrever 3^x na forma e^{xln3}, atendendo à fórmula dada que permite fazer a mudança de base: $a^x = e^{xlna}$. Em seguida, escrevemos novamente a função e depois derivamo-la:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3^x + \frac{ln(2x)}{x}\right)' = \left(e^{xln3} + \frac{ln(2x)}{x}\right)' = \left(e^{xln3}\right)' + \left(\frac{ln(2x)}{x}\right)' \\
&= (xln3)'e^{xln3} + \frac{\left(ln(2x)\right)'x - x'ln(2x)}{x^2} = ln3\ e^{xln3} + \frac{\frac{(2x)'}{2x}x - 1ln(2x)}{x^2} \\
&= 3^x ln3 + \frac{\frac{2}{2x}x - ln(2x)}{x^2} = 3^x ln3 + \frac{1 - ln(2x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

Sugere-se que identifique todas as regras de derivação aplicadas.

Nota: Neste Exemplo para representar o logaritmo de base e utilizámos a notação lnu, com $u = u(x)$. É conveniente que se lembrem de vez em quando desta notação!

Aconselha-se a que resolva os seguintes Exercícios. A prática nestas matérias só se adquire fazendo e repetindo muitos exercícios. A partir de um dado momento, como vai ser possível constatar, as regras de derivação estarão todas interiorizadas e não será necessário recorrer a formulários. Este é o objectivo que deverá ser atingido!

Exercício 9.

Calcule as derivadas seguintes:

a) $f(x) = 3x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 4$

b) $f(x) = \frac{x^4+x}{x^2+1}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

d) $f(x) = 2e^{2x} + e^{-x}$

e) $f(x) = ln(2x)$

f) $f(x) = 3sen(2x+1) + tgx$

g) $g(x) = 6^x + 4x^5 + \sqrt{2}$

Respostas e algumas resoluções:

Exercício 5. h'(x)=7

Exercício 6. $-9e^x + 8x^7 - \frac{2}{x}$

Exercício 8.

a) $6x^2 - \frac{2}{3}x + \sqrt{5}$

b) $-\frac{2}{x} + 4\frac{1}{(x+1)^2}$

c) $-\frac{1}{2x^2} + lnx + 1$

d) $-2e^x - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

e) $3cosx - (cosx - xsenx) + \frac{(4x^3+1)(x^2-1)-2x(x^4+x)}{(x^2-1)^2} = 2cosx + xsenx + \frac{2x^5-4x^3-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

Exercício 9.

a) $f'(x) = 9x^2 - \frac{4}{5}x$

b) $f'(x) = \frac{(4x^3+1)(x^2+1)-2x(x^4+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^5+4x^3+x^2+1-2x^5-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^5+4x^3-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

c) $f'(x) = \left((2x+5)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x+5)'(2x+5)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{(2x+5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$

d) $f'(x) = 4e^{2x} - e^{-x}$

e) $f'(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

f) $f'(x) = 6cos(2x+1) + \left(\frac{senx}{cosx}\right)' = 6cos(2x+1) + \frac{cosx\, cosx + senx\, senx}{(cosx)^2} =$

$$6cos(2x+1) + \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = 6cos(2x+1) + \frac{1}{cos^2x}$$

g) Sabemos que $6^x = e^{xln6}$, então $(6^x)' = \left(e^{xln6}\right)' = ln6\, e^{xln6} = ln6\, 6^x$. Assim, vem $g'(x) = ln6\, 6^x + 20x^4$.

NOTAS

NOTA 1: Como calcular a derivada de $f(x) = \log_a x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$ no caso em que $a \neq e$? Basta observar que $a = e^{\ln a}$, logo,

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = \left(e^{\ln a}\right)^{\frac{1}{\ln a}\ln x} = e^{\left(\ln a \frac{1}{\ln a}\ln x\right)} = e^{\ln x} = x$$

Conclusão: $a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = x$. Mas como $a^{\log_a x}$ também é igual a x tem-se

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = a^{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Então $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.

NOTA 2: As regras de derivação que estão na página 11 (por exemplo, $(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} u'(x))$ são todas casos particulares de uma regra que permite obter a derivada da função composta $h(x) = g\big(u(x)\big)$ se forem conhecidas as expressões de $u'(x)$ e de $g'(y)$. Essa regra é a seguinte:

$$(g(u(x)))' = u'(x) \cdot g'(u(x))$$

A justificação para esta regra reside na seguinte igualdade (recorde-se que "$g \circ u$" se lê "g após u"):

$$\begin{aligned}(g \circ u)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \, \frac{g(u(x)) - g(u(a))}{u(x) - u(a)} \\ &= \left(\lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \right) \cdot \left(\lim_{y \to u(a)} \frac{g(y) - g(u(a))}{y - u(a)} \right) = u'(a) \cdot g'\big(u(a)\big)\end{aligned}$$