ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Breve resolução

Grupo I.

1. **c) / d)**
2. **d)**
3. **d)**
4. **c)**

Grupo II. a) A afirmação é verdadeira. Tem-se

$$F = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\rangle := \langle f_1,\ f_2\rangle$$

e $G = \langle (1, -1, 0)\ ,\ (1, 1, 2)\rangle := \left\langle g_1\ ,\ g_2 \right\rangle$.
Para provar que $F = G$, vejamos que $G \subset F$ e $F \subset G$. É imediato que $G \subset F$, pois $g_1 \in F$ e $g_2 \in F$. E como $f_1 = 1/2(g_1 + g_2)$ e $f_2 = 1/2(g_2 - g_1)$ tem-se também $F \subset G$, e portanto concluímos que $F = G$.

b) A afirmação é falsa. Um contra exemplo simples em $\mathbb{R}^2$ é obtido tomando $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ e $w = (0, 0)$.

Grupo III. Trocando as linhas 1 e 2, e depois as linhas 2 e 3 do sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ x - y + 3z = 5 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

obtemos a solução única $z = 1, y = -9$ e $x = -7$.

Grupo IV. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Os valores próprios da matriz A são as soluções da equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Aplicando o Teorema de Laplace à primeira coluna obtem-se $\det(A - \lambda I_3) = (-1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 4) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda - 2)(1 - \lambda + 2) = (\lambda + 1)^2(-\lambda + 3)$, e portanto os valores próprios são -1, com multiplicidade algébrica 2, e 3 com multiplicidade algébrica 1.

b) O espaço próprio associado ao valor próprio -1 é gerado pelas soluções não nulas do sistema $Ax = -x$. As soluções são geradas por $(1\ 0\ 0)^\top$, e portanto o valor próprio -1 tem multiplicidade geométrica 1. O espaço próprio associado ao valor próprio 3 é gerado pelas soluções não nulas do sistema $Ax = 3x$. As soluções são geradas por $(5\ 8\ 4)^\top$, e portanto o valor próprio 3 tem multiplicidade geométrica 1.

c) Não existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, pois se existisse uma tal matriz P isso queria dizer que a matriz A era diagonalizável. Mas como a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de $A \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é $1 + 1 = 2 \neq 3$, a matriz A não é diagonalizável.

Grupo V. Considere a aplicação $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T(a,b,c) = ax^2 + (a+b)x + a + b + c.$$

a) Para ver que T é uma aplicação linear, é necessário ver que $\forall (a,b,c),(a',b',c') \in \mathbb{R}^3, T(a,b,c)+T(a',b',c') = T(a+a',b+b',c+c')$ e $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda T(a,b,c) = T(\lambda(a,b,c))$.

b) O núcleo de T é gerado pelas soluções de $T(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$. Uma vez que o polinómio nulo tem os coeficientes todos nulos, é neccessário que $a = 0, a+b = 0$ e $a+b+c = 0$, ou seja $(a,b,c) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

c) Vamos usar o teorema da Dimensão para determinar a dimensão da imagem de T. O espaço de partida $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, e o núcleo de T tem dimensão 0, logo $\dim \text{Im } T = 3 - 0 = 3$.

d) Os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ têm por imagem

$T(1,0,0) = x^2 + x + 1$, $T(0,1,0) = x + 1$ e $T(0,0,1) = 1$.

Na base $(x^2, x, 1)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ esses polinómios correspondem a $(1\ 1\ 1)^\top, (0\ 1\ 1)^\top$ e $(0\ 0\ 1)^\top$. A matriz M que representa T tem por colunas esses vetores: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) T é injetiva pois o seu núcleo consiste apenas no vetor nulo.

T é sobrejetiva pois $\dim \text{Im } T = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$.

f) T é invertível pois é injetiva, e a matriz que representa a inversa de T é a matriz inversa de M, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

VI. Tem-se $Av = A(A - I_n)w = (A^2 - A)w = 0$ pois $A^2 - A = 0$, e portanto $v = (A - I_n)w$ é solução do sistema $Ax = 0$.

FIM