E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: Elementos de Probabilidades e Estatística

CÓDIGO: 21037

DOCENTE: Catarina Nunes

TUTORAS: Ana Leitão Ferreira e Helena Grilo

A preencher pelo estudante

NOME: Luís Carlos Crispim Pereira

N.º DE ESTUDANTE: 2300163

CURSO: LEI – Licenciatura em Engenharia Informática

DATA DE ENTREGA: 20/05/24

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

1.1) O objetivo é determinar se o estudante deve preferir um exame com 3 ou 5 perguntas, considerando as probabilidades de responder corretamente às perguntas quando é examinado pelo professor ou pelo tutor.

Dados (Irei assumir P para professor e T para tutor:

$P(Correto\ |P) = 0{,}4$
$P(P) = \frac{2}{3}$

$P(Correto\ |T) = 0{,}8$
$P(T) = \frac{1}{3}$

<u>Exame com 3 perguntas:</u>

Para o Professor usamos $X_P - v.a$, que representa o número de respostas corretas com o professor seguindo uma distribuição binomial $X_P \sim Binomial(n = 3, p = 0{,}4)$, precisamos de calcular a probabilidade de responder corretamente a pelo menos 2 perguntas:

$$P(X_P \geq 2) = P(X_P = 2) + P(X_P = 3)$$

Onde:

$$P(X_P = k) = (\frac{n}{k})p^k(1-p)^{n-k}$$

Então:

$$P(X_P = 2) = (\frac{3}{2})(0{,}4)^2(1-0{,}4)^{3-2} = (\frac{3}{2})(0{,}4)^2(0{,}6)^1 = 3\,.\,0{,}16\,.\,0{,}6 = 0{,}288$$

$$P(X_P = 3) = (\frac{3}{3})(0{,}4)^3(1-0{,}4)^{3-3} = (\frac{3}{2})(0{,}4)^3(0{,}6)^0 = 1\,.\,0{,}064\ = 0{,}064$$

Portanto:

$$P(X_P \geq 2) = 0{,}288 + 0{,}064 = 0{,}352$$

Para o Tutor usamos $X_T - v.a$, que representa o número de respostas corretas com o professor seguindo uma distribuição binomial $X_T \sim Binomial(n = 3, p = 0{,}8)$, precisamos de calcular a probabilidade de responder corretamente a pelo menos 2 perguntas:

$P(X_T \geq 2) = P(X_T = 2) + P(X_T = 3)$

Onde:

$P(X_T = k) = (\frac{n}{k})p^k(1-p)^{n-k}$

Então:

$P(X_T = 2) = (\frac{3}{2})(0{,}8)^2(1-0{,}8)^{3-2} = (\frac{3}{2})(0{,}8)^2(0{,}2)^1 = 3 \,.\, 0{,}64 \,.\, 0{,}2 = 0{,}384$

$P(X_T = 3) = (\frac{3}{3})(0{,}8)^3(1-0{,}8)^{3-3} = (\frac{3}{2})(0{,}8)^3(0{,}2)^0 = 1 \,.\, 0{,}512 = 0{,}512$

Portanto:

$P(X_T \geq 2) = 0{,}384 + 0{,}512 = 0{,}896$

Probabilidade total de sucesso com 3 perguntas considerando que tanto pode ser o professor como o tutor:

$P(Sucesso\ com\ 3) = P(X_P \geq 2) \,.\, P(P) + P(X_T \geq 2) \,.\, P(T)$

$P(Sucesso\ com\ 3) = 0{,}352 \,.\, \frac{2}{3} + 0{,}896 \,.\, \frac{1}{3} = 0{,}2347 + 0{,}2987 = 0{,}5333$

Exame com 5 perguntas:

Para o Professor usamos $X_P - v.a$, que representa o número de respostas corretas com o professor seguindo uma distribuição binomial $X_P \sim Binomial(n = 5, p = 0{,}4)$, precisamos de calcular a probabilidade de responder corretamente a pelo menos 3 perguntas:

$P(X_P \geq 3) = P(X_T = 3) + P(X_T = 4) + P(X_T = 5)$

Onde:

$P(X_P = k) = (\frac{n}{k})p^k(1-p)^{n-k}$

Então:

$P(X_P = 3) = (\frac{5}{3})(0,4)^3(1-0,4)^{5-3} = (\frac{5}{3})(0,4)^3(0,6)^2 = 10 \,.\, 0,064 \,.\, 0,36 = 0,2304$

$P(X_P = 4) = (\frac{5}{4})(0,4)^4(1-0,4)^{5-4} = (\frac{5}{4})(0,4)^4(0,6)^1 = 5 \,.\, 0,0256 \,.\, 0,6 = 0,0768$

$P(X_P = 5) = (\frac{5}{5})(0,4)^5(1-0,4)^{5-5} = (\frac{5}{5})(0,4)^5(0,6)^0 = 1 \,.\, 0,01024 = 0,01024$

Portanto:

$P(X_P \geq 3) = 0,2304 + 0,0768 + 0,01024 = 0,31744$

Para o Tutor usamos $X_T - v.a$, que representa o número de respostas corretas com o professor seguindo uma distribuição binomial $X_T \sim Binomial(n = 5, p = 0,8)$, precisamos de calcular a probabilidade de responder corretamente a pelo menos 2 perguntas:

$P(X_T \geq 3) = P(X_T = 3) + P(X_T = 4) + P(X_T = 5)$

Onde:

$P(X_T = k) = (\frac{n}{k})p^k(1-p)^{n-k}$

Então:

$P(X_T = 3) = (\frac{5}{3})(0,8)^3(1-0,8)^{5-3} = (\frac{5}{3})(0,8)^3(0,2)^2 = 10 \,.\, 0,512 \,.\, 0,04 = 0,2048$

$P(X_T = 4) = (\frac{5}{4})(0,8)^4(1-0,8)^{5-4} = (\frac{5}{4})(0,8)^4(0,2)^1 = 5 \,.\, 0,4096 \,.\, 0,2 = 0,4096$

$P(X_T = 5) = (\frac{5}{5})(0,8)^5(1-0,8)^{5-5} = (\frac{5}{5})(0,8)^5(0,2)^0 = 1 \,.\, 0,32768 = 0,32768$

Portanto:

$P(X_T \geq 3) = 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208$

Probabilidade total de sucesso com 5 perguntas considerando que tanto pode ser o professor como o tutor:

$P(Sucesso\ com\ 5) = P(X_P \geq 3)\,.\,P(P) +\ P(X_T \geq 3)\,.\,P(T)$

$P(Sucesso\ com\ 5) = 0{,}31744\,.\,\frac{2}{3} + 0{,}94208\,.\,\frac{1}{3} = 0{,}21163 + 0{,}31403 = 0{,}52567$

Conclusão:

$P(Sucesso\ com\ 3) = 0{,}5333$

$P(Sucesso\ com\ 5) = 0{,}52567$

Portanto, o estudante deve preferir um exame com 3 perguntas.

1.2) Para calcular a probabilidade de que o tenha sido feito com o professor, sabendo que o estudante passou num exame de 3 perguntas, podemos usar o teorema de Bayes.

Dados (do enunciado ou obtidos em 1.1):

$P(P) = \frac{2}{3}$

$P(T) = \frac{1}{3}$

$P(Sucesso\,|\,P) = 0{,}352$

$P(Sucesso\,|\,T) = 0{,}896$

$P(Sucesso\ com\ 3) = 0{,}5333$

Teorema de Bayes:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \,.\, P(A)}{P(B)}$$

Substituindo:

$$P(P \mid Sucesso) = \frac{P(Sucesso \mid P) \,.\, P(P)}{P(Sucesso\ com\ 3)} = \frac{0{,}352 \,.\, \frac{2}{3}}{0{,}5333} = \frac{0{,}2347}{0{,}5333} \simeq 0{,}440$$

Portanto a probabilidade de que o exame tenha sido feito com o professor, dado que o estudante passou no exame de 3 perguntas é aproximadamente 0,440 (ou 44%).

2.1) Resposta A - X ~ Bin(2, 2/3)

2.2) Resposta A - 4/3

2.3) Resposta A - X ~ H(12, 8, 2)

3.1) Para determinar as funções de distribuição marginais de X e Y, precisamos somar as probabilidades conjuntas sobre os valores possíveis da outra variável.

Função de distribuição marginal de X, somamos as probabilidades conjuntas $P(X = x, Y = y)$ sobre todos os valores possíveis de Y.

Para $X = -1$

$$P(X = -1) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 1) + P(X = -1, Y = -2)$$

$$\Leftrightarrow P(X = -1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(X = -1) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow P(X = -1) = \frac{1}{2}$$

Para $X = 2$

$$P(X=2) = P(X=2, Y=-1) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=2) \Leftrightarrow P(X=2)$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(X=2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \Leftrightarrow \ P(X=2) = \frac{1}{2}$$

Função de distribuição marginal de Y, somamos as probabilidades conjuntas $P(X = x, Y = y)$ sobre todos os valores possíveis de X.

Para $Y = -2$

$$P(Y=-2) = P(X=-1, Y=-2) \Leftrightarrow \ P(Y=-2) = \frac{1}{4}$$

Para $Y = -1$

$$P(Y=-1) = P(X=-1, Y=-1) + P(X=2, Y=-1) \Leftrightarrow \ P(Y=-1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$
$$\Leftrightarrow P(Y=-1) = \frac{1}{6}$$

Para $Y = 1$

$$P(Y=1) = P(X=-1, Y=1) + P(X=2, Y=1) \Leftrightarrow \ P(Y=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ P(Y=1)$$
$$= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow \ P(Y=1) = \frac{5}{12}$$

Para $Y = 2$

$$P(Y=2) = P(X=2, Y=2) \Leftrightarrow \ P(Y=2) = \frac{1}{6}$$

Portanto a função de distribuição marginal de X é:

$P(X = -1) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $P(X = 2) = \frac{1}{2}$

Portanto a função de distribuição marginal de Y é:

$P(Y = -2) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(Y = -1) = \frac{1}{6}$

$P(Y = 1) = \frac{5}{12}$ $\quad$ $P(Y = 2) = \frac{1}{6}$

3.2) Para calcular o valor esperado $E[X] e\, E[Y]$ e a variância $Var(X)\ e\ Var(Y)\ de\ X\ e\ Y$, utilizamos as distribuições marginais anteriormente determinadas.

Valor esperado:

$$E[X] = \sum\nolimits_x X\ .P(X = x) \Leftrightarrow E[X] = (-1)\ .\ \frac{1}{2} + 2\ .\frac{1}{2} \Leftrightarrow E[X] = -\frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow E[X] = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \sum\nolimits_y Y\ .P(Y = y) \Leftrightarrow E[Y] = (-2)\ .\frac{1}{4} + (-1)\ .\frac{1}{6} + 1\ .\frac{5}{12} + 2\ .\frac{1}{6} \Leftrightarrow E[Y]$$
$$= (-2)\ .\frac{3}{12} + (-1)\ .\frac{2}{12} + 1\ .\frac{5}{12} + 2\ .\frac{2}{12} \Leftrightarrow E[Y] = -\ \frac{6}{12} - \frac{2}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12}$$
$$\Leftrightarrow E[Y] = -\ \frac{8}{12} + \frac{9}{12} \Leftrightarrow E[Y] = \frac{1}{12}$$

Variância:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

Necessitamos calcular $E[X^2]$ e $E[Y^2]$:

$$E[X^2] = \sum_x X^2\ .P(X = x) \Leftrightarrow E[X^2] = (-1)^2\ .\ \frac{1}{2} + 2^2 .\frac{1}{2} \Leftrightarrow E[X^2] = 1 .\frac{1}{2} + 4 .\frac{1}{2} \Leftrightarrow E[X^2] = \frac{5}{2}$$

$$E[Y^2] = \sum_x Y^2\ .P(X = x) \Leftrightarrow E[Y] = (-2)^2 .\frac{1}{4} + (-1)^2 .\frac{1}{6} + 1^2 .\frac{5}{12} + 2^2 .\frac{1}{6} \Leftrightarrow E[Y] = 4 .\frac{1}{4} + 1 .\frac{1}{6} + 1 .\ \frac{5}{12} + 4 .\frac{1}{6} \Leftrightarrow E[Y] = 4 .\frac{3}{12} + 1 .\frac{2}{12} + 1 .\frac{5}{12} + 4 .\frac{2}{12} \Leftrightarrow E[Y] = \frac{12}{12} + \frac{2}{12} + \frac{5}{12} + \frac{8}{12} \Leftrightarrow E[Y] = \frac{27}{12} = 2{,}25$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \Leftrightarrow Var(X) = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow Var(X) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow Var(X) = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 \Leftrightarrow Var(Y) = 2{,}25 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \Leftrightarrow Var(Y) = 2{,}25 - \frac{1}{144} \Leftrightarrow Var(Y) = 2{,}24306$$

Portanto os valores esperados e variâncias são:

$E[X] = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $E[Y] = \frac{1}{12}$

$Var(X) = 2{,}25$ $\qquad$ $Var(Y) = 2{,}24306$

3.3) Resposta D - Nenhuma das opções anteriores

4.1) Para resolver este problema podemos utilizar a distribuição de Poisson onde:

X (número de ananases produzidos por semana) $\sim$ Poisson ($\lambda = 121{,}95$)

Pretende-se encontrar $P(X\ \geq 130)$. Essa probabilidade pode ser expressa como:

$P(X\ \geq 130) = 1 - P(X\ \leq 129)$

Calculando $P(X\ \leq 129)$ usando a distribuição de Poisson:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Para $k = 129\ e\ \lambda = 121{,}95$

$$P(X \leq 129) = \sum_{i=0}^{129} e^{-121{,}95} \frac{121{,}95^i}{i!} \simeq 0{,}7555$$

Substituindo:

$P(X\ \geq 130) = 1 - P(X\ \leq 129) \Leftrightarrow P(X\ \geq 130) = 1 - 0{,}7555 \Leftrightarrow P(X\ \geq 130) = 0{,}2445$

Portanto em 24,45% das semanas produziram-se 130 ou mais ananases.

4.2) Podemos resolver este exercício usando também a distribuição de Poisson onde:

X (número de ananases produzidos por semana) $\sim$ Poisson $(\lambda = 121{,}95)$

Pretende-se encontrar $P(X\ \leq 100)$. Essa probabilidade pode ser calculada usando a distribuição de Poisson:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

Para $k = 100\ e\ \lambda = 121{,}95$

$$P(X \leq 100) = \sum_{i=0}^{100} e^{-121{,}95} \frac{121{,}95^i}{i!} \simeq 0{,}0234$$

Portanto em 2,34% das semanas produziram-se 100 ou menos ananases.