U.C. 21002 — Álgebra Linear I
Atividade Formativa 1

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Considere as matrizes seguintes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

☐ **a)** $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $A - C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $C + I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 2x - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Sendo $X = (x, y, z)^\mathsf{T}$, pode-se escrever este sistema na forma $AX = b$, onde A e b são, respetivamente:

☐ **a)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Seja $n \geqslant 2$ e considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Então, é sempre verdade que:

- [ ] **a)** Se $AX = 0$, então $A = 0$ ou $X = 0$.
- [ ] **b)** Se $AX = BX$, então $A = B$.
- [ ] **c)** Se $AX = AY$, então $X = Y$.
- [ ] **d)** Se $A^\mathsf{T} X = 0$, então $X^\mathsf{T} AB = 0$.

4. Se A é uma matriz quadrada $(n \times n)$ que satisfaz $I_n = A + A^2 + A^3$, então pode-se concluir que:

- [ ] **a)** A não é invertível.
- [ ] **b)** A é invertível e $A^{-1} = \frac{I_n}{\det A}$.
- [ ] **c)** A é invertível e $A^{-1} = I_n + A + A^2$.
- [ ] **d)** A é invertível e $A^{-1} = 1 + A + A^2$.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$, determine os valores de $a \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e, para esses valores, calcule A^{-1}.

III. Utilizando o Teorema de Laplace determine o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

IV. Recorrendo à regra de Cramer, calcule a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 0 \\ -x + y + 3z &= 3 \\ 3x + 5y + 2z &= 4 \end{cases}$$

V. Seja N_n a matriz quadrada de ordem n definida por

$$(N_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i+1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Escreva explicitamente as matrizes N_n nos casos $n = 2, 3, 4, 5$.

b) Calcule N_n^k, para $k \in \mathbb{N}$, e determine os valores de $r(N_n^k)$.

c) Determine a forma geral das matrizes que comutam com N_n, para $n = 2$ e $n = 3$. Conjeture o resultado para N_n geral.

VI. Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto de todos os polinómios, de qualquer grau, na variável real x. Mostre que $\mathbb{R}[x]$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathbb{R}_{\text{par}}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ o subconjunto constituido apenas pelos polinómios de ordem par, e $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x] \subset \mathbb{R}[x]$ o subconjunto constituido apenas pelos polinómios de ordem ímpar. Será $\mathbb{R}_{\text{par}}[x]$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}[x]$? E $\mathbb{R}_{\text{ímpar}}[x]$?