U.C. 21175 - Análise Infinitesimal

Trabalho final - proposta de resolução

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) **[2.5 val.]**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 + e^{2x}\sin(5x)}{x^4+3}.$$

Temos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 + e^{2x}\sin(5x)}{x^4+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\frac{x^4}{x^4} + \frac{e^{2x}\sin(5x)}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + \frac{e^{2x}\sin(5x)}{x^4}}{1+\frac{3}{x^4}}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^4} = 0.$$

Agora notamos que para $x < 0$, $0 < e^{2x} < 1$ e $-1 \leq \sin(5x) \leq 1$, pelo que

$$-1 \leq e^{2x}\sin(5x) \leq 1.$$

Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 0,$$

pelo teorema dos limites enquadrados, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}\sin(5x)}{x^4} = 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4 + e^{2x}\sin(5x)}{x^4+3} = 2.$$

   (b) **[2.5 val.]**

$$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1}.$$

A substituição directa de x por 1 conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Notamos que o denominador é uma função polinomial, pelo que é uma função duas vezes diferenciável e também o numerador é uma função duas vezes diferenciável, pois resulta do produto de uma função polinomial, com a composição da função cosseno com um polinómio, todas elas funções duas vezes diferenciáveis. Tentando aplicar a regra de Cauchy, calculamos

$$\lim_{x\to1} \frac{\left((x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)'}{(x^3-x^2-x+1)'} = \lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x-1)}{3x^2-2x-1}$$

que também conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Tentando novamente aplicar a regra de Cauchy, calculamos

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x-1)\right)'}{(3x^2-2x-1)'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x-1) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{6x-2} \\
&= \frac{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}{4} = -\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Como existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x-1)\right)'}{(3x^2-2x-1)'}$$

pela regra de Cauchy, também existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x-1)}{(3x^2-2x-1)}$$

e os limites são iguais e como este último limite existe, também pela regra de Cauchy, o limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1}$$

e existe e temos

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^3-x^2-x+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

2. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1} & x < 0 \\ \\ x^2 - x\sin(\pi x) + 2 & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) **[2 val.]** Estude a continuidade de f.

Comecemos por estudar a continuidade de f para x negativo. A função $x+1$ é contínua, pois é uma função polinomial. Então, e^{x+1} é uma função contínua, pois resulta da composição da função exponencial com a função polinomial $x+1$, ambas funções contínuas. Assim, o numerador $e^{x+1}+x+1$ é também uma função contínua, pois resulta da soma de duas funções contínuas. O denominador x^2+1 é uma função polinomial, pelo que é contínua. Para além disso, para $x<0$ temos $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0$, logo o denominador nunca se anula. Então, para $x<0$, a função f é contínua, pois resulta da divisão de duas funções contínuas, em que o denominador não se anula.

Analisemos agora o caso $x>0$. A função x^2+2 é contínua, pois é uma função polinomial. A função $x\sin(\pi x)$ é também contínua pois é o produto de um polinómio com a composição da função seno, com um polinómio, todos elas funções contínuas. Então, para $x>0$ a função f é contínua, pois é a soma de funções contínuas.

Falta apenas analisar a continuidade de f no ponto $x=0$, pelo que estudamos os seguintes limites laterais

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}\right) = e+1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 - x\sin(\pi x) + 2\right) = 2.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

concluímos que f não é contínua no ponto $x = 0$. Então f é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, sendo descontínua no ponto $x = 0$.

(b) **[2 val.]** A função f é diferenciável no ponto $x = 0$? Justifique.

Pela alínea anterior, a função f não é contínua no ponto $x = 0$, pelo que não é diferenciável no ponto $x = 0$.

3. **[3 val.]** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e duas vezes diferenciável em $]a,b[$ tal que $f(b) > f(a)$ e designemos por f' a função derivada de f. Suponha que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) < 0$. Prove que f' tem pelo menos uma raíz no intervalo $[a,b]$.

Como a função f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, pelo teorema de Lagrange, existe $\rho \in [a,b[$ tal que

$$f'(\rho) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0,$$

pois $f(b) > f(a)$ e $b > a$. Por outro lado, como existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) < 0$, sendo f' uma função contínua no intervalo $I := [\min(c,\rho), \max(c,\rho)] \subset [a,b]$ e que muda de sinal no intervalo I, pelo teorema de Bolzano concluímos que existe um zero de f' no intervalo I, pelo que existe pelo menos uma raíz de f' no intervalo $[a,b]$, como se pretendia mostrar.

4. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

(a) **[2.5 val.]** $xe^{x^2+1} + e^x\cos(5e^x) - x^3$. Temos

$$\begin{aligned}
&\int \left(xe^{x^2+1} + e^x\cos(5e^x) - x^3\right) dx \\
&= \int \left(xe^{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{5}\int 5e^x\cos(5e^x)dx - \int x^3 dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(2xe^{x^2+1}\right) dx + \frac{1}{5}\sin(5e^x) - \frac{x^4}{4} = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + \frac{1}{5}\sin(5e^x) - \frac{x^4}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(b) **[2.5 val.]** $(3x^2+5x)e^{-3x}$. Temos

$$\int (3x^2+5x)e^{-3x}dx = 3\int x^2e^{-3x}dx + 5\int xe^{-3x}dx$$

Fazendo integração por partes, temos

$$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x}.$$

Da mesma forma,

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x^2 - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}2x\right) dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}x^2 + \frac{2}{3}\int \left(e^{-3x}x\right) dx,$$

logo

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-3x} dx &= -\frac{1}{3}e^{-3x}x^2 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x}\right)\\ &= -\frac{1}{3}e^{-3x}x^2 - \frac{2}{9}e^{-3x}x - \frac{2}{27}e^{-3x}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int (3x^2+5x)e^{-3x} dx = 3\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}x^2 - \frac{2}{9}e^{-3x}x - \frac{2}{27}e^{-3x}\right) +\\ 5\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}x - \frac{1}{9}e^{-3x}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}\\ = -e^{-3x}x^2 - \frac{7}{3}e^{-3x}x - \frac{7}{9}e^{-3x} + C,\ C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

5. **[3 val.]** Calcule a área do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cujas coordenadas satisfazem as seguintes condições

$$0 \leq x \leq 4, \qquad 0 \leq y \leq \cos(4\pi x) + 2(x+1) + e^{-x}.$$

A área do conjunto é dada por

$$\begin{aligned}&\int_0^4 \left(\cos(4\pi x) + 2(x+1) + e^{-x}\right) dx\\ &= \left[\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi} + (x+1)^2 - e^{-x}\right]_0^4\\ &= \left[\frac{\sin(16\pi)}{4\pi} + (5)^2 - e^{-4} - \left(\frac{\sin(4\pi \times 0)}{4\pi} + 1 - e^0\right)\right]\\ &= 25 - e^{-4}\end{aligned}$$

FIM