ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

Período de Realização

Decorreu no dia 7 de junho de 2024

Proposta de Resolução

1 Considere 3 urnas com bolas. A urna A contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. A urna B contém 8 bolas brancas e 2 bolas pretas. A urna C contém 5 bolas brancas e 5 bolas pretas.
Uma bola é retirada da urna A.
Se a bola retirada da urna A for branca, então é retirada uma bola da urna B. Mas se a bola retirada da urna A for preta, então é retirada uma bola da urna C.

a) Considere os seguintes eventos:

- E_A o evento em que a primeira bola retirada da urna A é branca;
- E_B o evento em que a primeira bola retirada da urna B é branca;
- E_C o evento em que a primeira bola retirada da urna C é branca;

Faça as ligações corretas:
$P(E_A) = 2/5$
$P(E_B) = 4/5$
$P(E_C) = 1/2$

b) Qual a probabilidade de ser retirada uma bola branca na segunda urna?

- ☐ 31/50*
- ☐ 8/50
- ☐ 12/50
- ☐ 27/50

(Resolução)

Seja F o evento em questão, então

$$P(F) = P(F|E_A)P(E_A) + P(F|\bar{E_A})P(\bar{E_A}) = P(E_B)P(E_A) + P(E_C)P(\bar{E_A})$$

$$= 31/50$$

c) Calcule a probabilidade de uma bola preta ser retirada da segunda urna, sabendo que foi retirada uma bola branca da urna A.

- ☐ 5/25*
- ☐ 2/25
- ☐ 8/25
- ☐ 3/25

(Resolução)

$$P(\bar{F}|E_A) = P(\bar{E_B}) = 1/5$$

2. Uma menina distribui 10 pedaços de pão pelos seus dois patos (um pato holandês e um pato real). Para cada pedaço de pão a probabilidade de ser comido pelo pato real é 1/3.
Seja X a variável aleatória número de pedaços de pão que são comidos pelo pato real.

a) Qual a distribuição de X?

- ☐ $Bin(10, 2/3)$
- ☐ $Bin(10, 1/3)$*
- ☐ $Bin(10, 3/10)$

(Resolução)

Seja E_i o evento do i-ésimo pedaço de pão ser comido pelo pato real.

$$P(E_i) = 1/3$$

$$X = E_1 + E_2 + ... + E_{10}$$

Portanto $X \sim Bin(10, 1/3)$.

b) Qual das seguintes opções está correta?

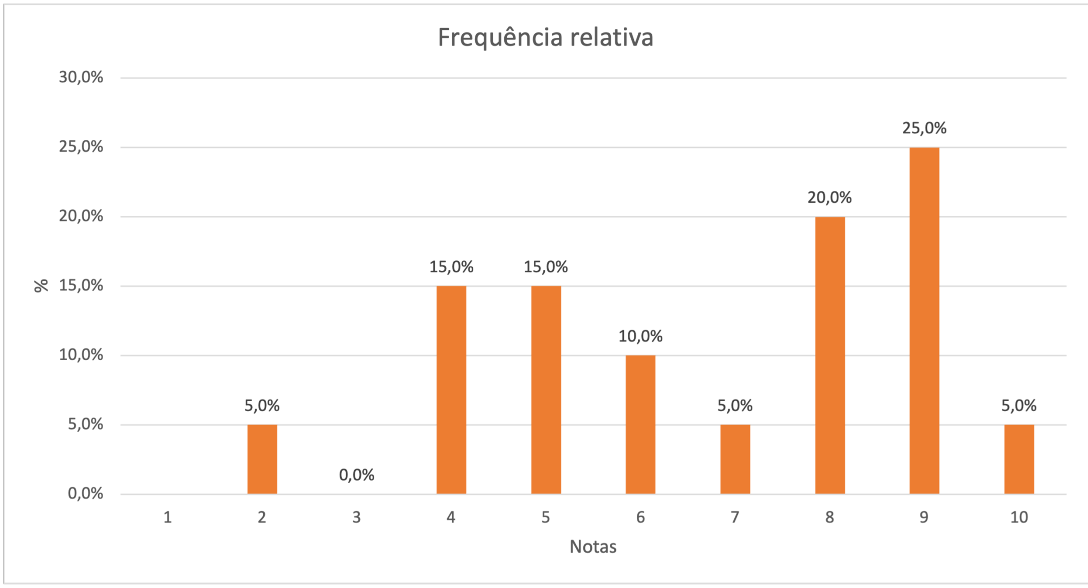
- ☐ $E(X) = 20/9$ e $Var(X) = 20/6$
- ☐ $E(X) = 20/6$ e $Var(X) = 10/3$
- ☐ $E(X) = 10/3$ e $Var(X) = 20/9$*

*(**Resolução**)*
Como $X \sim Bin(10, 1/3)$, $E(X) = np = 10 \times 1/3 = 10/3$ e $Var(X) = np(1-p) = 10 \times 1/3 \times 2/3 = 20/9$

3. Um professor pede a 180 estudantes para realizarem um mini teste de revisão. Os resultados (1 a 10 valores) foram:

Notas	Nº de Alunos	Freq. relativa	Freq. relativa acumulada
1	0	0%	0%
2	9	9/180= 5%	5%
3	0	0%	5%
4	27	27/180=15%	20%
5	27	15%	35% $\Rightarrow Q1 = 5$
6	18	18/180=10%	45%
7	9	5%	50% $\Rightarrow Q2 = 7$
8	36	36/180=20%	70%
9	45	45/180=25%	95% $\Rightarrow Q3 = 9$
10	9	5%	100%

a) Corrija o gráfico seguinte considerando as frequências relativas.



b) Determine a moda:

Resposta:	

*(**Resolução**)*
Moda é o valor mais frequente, $m_o = 9$

c) Calcule a mediana:

Resposta:	

*(**Resolução**)*

Mediana = 2º quartil = $Q_2 = 7$

d) Calcule a amplitude inter quartil:

Resposta:	

*(**Resolução**)*
Amplitude inter quartil = 4 $(Q_1 = 5 \;\; Q_3 = 9)$

4. A AirKiwi estima que 5% das pessoas que reservam voos não aparecem no embarque, por este motivo a AirKiwi faz *overbooking* (vende mais bilhetes do que lugares no avião).
Se a AirKiwi vender 240 bilhetes para um voo cujo avião tem apenas 233 lugares, qual a probabilidade de todos os passageiros que aparecem ao embarque terem lugar no avião?
*(**Resolução**)*
Seja X_i - o evento do passageiro i com bilhete aparecer no embarque; X_i segue uma distribuição de Bernoulli com $p = 0,95$.
(Cotação: 10%)
A soma de 240 v.a. de Bernoulli é dada por:

$$Y = \sum_{i=1}^{240} X_i$$

Considerando o Teorema do Limite Central ($n = 240 > 30$), Y segue uma distribuição normal:

$$Y \sim N\left(240 \times 0,95 = 228; 240 \times 0,95 \times (1 - 0,95) = 11,4\right)$$

(Cotação: 30%)
e

$$P(Y \leq 233) = P\left(\frac{Y - 228}{3,3764} \leq \frac{233 - 228}{3,3764}\right) = P(Z \leq 1,48) = 0,9306$$

Com $Z \sim N(0;1)$.
(Cotação: 60%)

5. O verdadeiro peso de sacos de um kilo de chocolate da fábrica de chocolate ChocoBom é aleatório e apresenta uma função de densidade de probabilidade uniformemente distribuída entre 0,8 *Kg* e 1,05 *Kg*:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0,8 < x < 1,05 \\ 0 & outros \;\; valores \end{cases}$$

a) Determine o valor de k.
(Resolução)
k terá de ser tal que $f(x) \geq 0 \; \forall x \Rightarrow k > 0$ **(Cotação: 20%)**
e:

$$\int f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0,8}^{1,05} kdx = kx|_{0,8}^{1,05} = k(1,05 - 0,8) = 1$$

(Cotação: 60%)
donde

$$k = \frac{1}{1,05 - 0,8} = \frac{1}{0,25} = 4$$

(Cotação: 20%)

b) Qual o peso médio dos sacos de chocolate nesta fábrica?
(Resolução)

$$E(X) = \int xf(x)dx = \int_{0,8}^{1,05} 4xdx = 2x^2|_{0,8}^{1,05} = 2,205 - 1,28 = 0,925$$

O peso médio dos sacos é de 0,925 *Kg*.
(Cotação: 20% para a definição e 80% para a determinação

c) Qual a probabildade de um saco de chocolate pesar menos de um kilo?

Resposta:	

(Resolução)

$$P(X < 1) = \int_{0,8}^{1} 4dx = 4x|_{0,8}^{1} = 0,8$$

d) Da produção total da ChocoBom, qual a percentagem de sacos de chocolate com peso superior ao indicado no rótudo?

Resposta:	

*(**Resolução**)*

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,8 = 0,2$$

ou

$$P(X > 1) = \int_1^{1,05} 4dx = 4x|_1^{1,05} = 0,2$$

A percentagem é $0,2 \times 100 = 20\%$.

A distribuição da cotação total (20 valores) pelos 5 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1a)	1b)	1c)	2a)	2b)	3a)	3b)	3c)	3d)	4	5a)	5b)	5c)	5d)
Cotação	1.0	1.5	1.0	1.5	1.5	1.0	0.5	1.0	1.5	3.0	2.0	2.0	1.5	1.0

FIM