Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
D)	B)	B)

4. Observe-se que sendo o âmbito deste exercício os números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, há que excluir o 0 da casa dos milhares, podendo esta casa ser ocupada por qualquer um dos restantes 9 algarismos. Sem restrições, a casa das centenas, das dezenas e das unidades pode ser ocupada por qualquer um dos 10 algarismos. Logo, existe um total de $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números com quatro algarismos pertencentes ao conjunto indicado no início.

4.1. Uma maneira de resolver esta questão será calcular, primeiro, o número total de números de quatro dígitos que não contêm o 0. Ou seja, o número total de números de quatro algarismos pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (cujo valor é $9^4 = 6561$). Assim, em resposta a esta alínea tem-se um total de

$$9000 - 6561 = 2439$$

números diferentes de quatro dígitos pertencentes ao conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ que contêm o algarismo 0.

4.2. Fixado o 2 na casa das unidades, a casa dos milhares pode ser ocupada por um qualquer dígito entre 8 (já que se exclui o 0 e o 2). O algarismo das centenas pode ser um qualquer algarismo entre 8 possibilidades (excluído o 2 e o dígito fixado na casa dos milhares). Para o algarismo das dezenas existem 7 possibilidades (excluídos os três dígitos já fixados). Ou seja, existem

$$8 \times 8 \times 7 = 448$$

números diferentes que não têm dígitos repetidos e que terminam em 2.

5. A argumentação apresentada pelo estudante conduz a uma sobrecontagem. Com efeito, suponhamos que entre 15 engenheiros informáticos encontram-se o Alberto e o António. Pelo argumento apresentado pelo estudante, o Alberto pode ser o primeiro a ser escolhido e, entre os restantes 5 elementos do grupo de trabalhado, pode surgir o António e mais 4 pessoas (X, Y, Z e W). Mas pode acontecer que entre os 15 engenheiros informáticos o António seja o primeiro a ser escolhido e nos restantes 5 elementos surjam o Alberto e X, Y, Z e W. Ou seja, o grupo de trabalho constituído pelo Alberto, o António, o X, o Y, o Z e o W é contabilizado pelo menos duas vezes.

Por forma a eliminar a sobrecontagem, observe-se que se qualquer elemento puder integrar o grupo de trabalho, existem

$$\binom{15+11}{6} = \binom{26}{6}$$

diferentes possibilidades para a constituição do grupo. Para grupos de trabalho formados **só** por engenheiros eletrotécnicos, existem

$$\binom{11}{6}$$

possibilidades. Ou seja, existem

$$\binom{26}{6} - \binom{11}{6}$$

maneiras diferentes para formar um grupo de trabalho em que pelo menos um dos elementos seja um engenheiro informático.

6.1. Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso $m = n = 0$ e, portanto,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k}\binom{k}{0} = \binom{0}{0}\binom{0}{0} = 1 = \binom{0}{0}2^{0-0},$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **arbitrário**, suponhamos que

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}, \quad \forall\, 0 \leq m \leq n$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{n+1}{k}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m}2^{(n+1)-m}, \quad \forall\, 0 \leq m \leq n+1$$

Passo de indução: Para se provar a tese de indução suponhamos que $m \neq 0$. Assim sendo, resulta da fórmula da extração que

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{n+1}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n+1} \frac{n+1}{k}\frac{k}{m}\binom{n}{k-1}\binom{k-1}{m-1}$$
$$= \frac{n+1}{m}\sum_{k=m}^{n+1}\binom{n}{k-1}\binom{k-1}{m-1}$$

em que, pela mudança de variável $r = k-1$, a última soma é igual a

$$\sum_{r=m-1}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{m-1}.$$

Em relação a esta soma, observe-se que por $1 \leq m \leq n+1$, tem-se $0 \leq m-1 \leq n$, o que permite aplicar a hipótese de indução a esta soma. Por esta hipótese,

$$\sum_{r=m-1}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{m-1} = \binom{n}{m-1}2^{n-(m-1)}$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=m}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{k}{m} = \frac{n+1}{m}\binom{n}{m-1}2^{n-(m-1)} = \binom{n+1}{m}2^{(n+1)-m},$$

onde na última igualdade utilizou-se novamente a fórmula da extração.

Suponhamos agora que $m = 0$. Neste caso,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{k}{0} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k},$$

com

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k},$$

onde, pela lei de Pascal,

$$\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1},$$

por $\binom{n}{n+1} = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade realizou-se a mudança de variável $r = k - 1$. Aplicando a hipótese de indução (para $m = 0$) a esta última soma obtém-se então

$$2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

o que completa a prova da tese de indução para $m = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}.$$

Pelo método de indução matemática, fica assim provado que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m},$$

onde $m \in \mathbb{N}$ é um qualquer valor entre 0 e n.

6.2. Pela revisão trinomial tem-se que

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m},$$

onde, de acordo com a alínea 6.1,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} = 2^{n-m}.$$