Matemática Preparatória | Resolução E-fólio B

Resolução

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^3+3x^2+2x}$

   Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Levantemos a indeterminação:
   $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+4x+4}{x^3+3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x+2)^2}{x(x+2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{x(x+1)} = \dfrac{-2+2}{-2(-2+1)} = 0.$
   Acima, procedeu-se à fatorização dos polinómios. Usando a fórmula resolvente, $x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times4}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm0}{2} \Leftrightarrow x=-2$. E portanto $x^2+4x+4=(x+2)^2$. Por seu turno, $x^3+3x^2+2x = x(x^2+3x+2) = x(x+2)(x+1)$. Para chegarmos à última igualdade uma vez mais podemos aplicar a fórmula resolvente: $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x=-1$.

   (b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x}$

   Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.
   $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x^3}x^2 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^3}-1}{x^3} \times \lim\limits_{x\to0} x^2 = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{e^y-1}{y} \times \lim\limits_{x\to0} x^2 = 1\times0 = 0.$
   Fizemos a mudança de variável $y=x^3$. Quando $x\to0$ temos que $y\to0$.

2. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x}+1} & \text{se } x>0 \\ \ln(1-x) & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

(a) Verifique se a função f é contínua em $x = 0$.

Resolução: Para que a função seja contínua em $x = 0$ é preciso que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Temos que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$. Temos que $f(0) = \ln(1) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x}+1} = \frac{sen(0+\frac{\pi}{2})}{\sqrt{0}+1} = sen(\frac{\pi}{2}) = 1$. Como $f(0) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ concluímos que a função f não é contínua em $x = 0$.

(b) Indique, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Resolução: A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: Pela alínea (a) temos que f não é contínua em $x = 0$, mas repare que em cada um dos ramos a função está definida em todos os pontos desse ramo e trata-se da composição de funções contínuas nesses seus repetivos domínios (quociente, seno, raízes, soma, logaritmo).

(c) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique a sua resposta.

Resolução: Não. Como f não é contínua em $x = 0$ não é diferenciável em $x = 0$.

3. Usando as regras de derivação, calcule a derivada da função

$$g(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}} \qquad (x \geq 0)$$

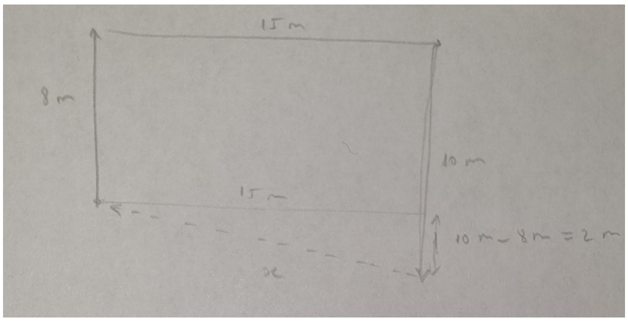
Resolução: $g'(x) = (\sqrt{1+\sqrt{x}})' = ((1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}-1} \times (1+\sqrt{x})' = \frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \times (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

4. Calcule, usando a definição de derivada num ponto, a derivada da função $h(x) = \frac{1}{x+2}$ no ponto de abcissa $x = -1$.

Resolução: $h'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(-1)+2}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1-(x+2)}{x+2}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{-1-x}{x+2}}{x+1} = \lim_{x\to -1} -\frac{1}{x+2} = -1.$

5. Ao caminhar num parque natural, o João percorreu 8 metros para Norte em linha reta, 15 metros para Este em linha reta e, finalmente, 10 metros para Sul também em linha reta. Após este percurso, se o João pudesse caminhar diretamente para o ponto de partida, qual seria a distância que percorreria?

Resolução:



Pela imagem acima percebemos que a resolução do problema se resume a uma aplicação do Teorema de Pitágoras, ou seja, descobrir o comprimento da diagonal de um retângulo de lado maior 15m e lado menor 2m. Assim, $x^2 = 15^2 + 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 225 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 229 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{229} \approx \pm 15,1$. Como se trata de uma distância temos que $x = \sqrt{229} \approx 15,1$m.

FIM