

U.C. 21003

Álgebra Linear II

12 de junho de 2019

- INSTRUÇÕES -

- O enunciado da prova é composto por 4 grupos de questões e respectivas alíneas, contém um total de 1 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Todas as questões deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

COTAÇÃO E CRITÉRIOS DE CORREÇÃO:

- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos quatro grupos de questões é a seguinte: Grupo I: 5 val.; Grupo II: 5 val.; Grupo III: 6 val.; Grupo IV: 4 val.
- Serão fatores a ter em conta para a avaliação da prova, a **correção matemática** das respostas, a **apresentação de todos os cálculos** necessários para a compreensão do raciocínio, bem como a **justificação cuidada** das respostas e a **redação clara e organizada** das mesmas. Respostas apresentadas sem qualquer justificação, mesmo que corretas, serão classificadas com zero valores.

I. Considere a matriz real

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Conclua que os valores próprios distintos de B são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um deles.
- Recorrendo apenas aos resultados da alínea anterior, escreva explicitamente uma matriz de Jordan, J , semelhante a B .
- Determine os vetores próprios e os vetores próprios generalizados de B e use-os para construir uma matriz invertível M tal que $MBM^{-1} = J$, onde J é a matriz de Jordan da alínea anterior.

II. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canónico e seja $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$.

- Determine $\mathbf{u}^\perp$.
- Mostre que $\mathbf{u}^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e determine uma sua base ortonormal para o produto interno canónico.
- Calcule as projecções ortogonais de $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ sobre $\langle \mathbf{u} \rangle$ e sobre $\mathbf{u}^\perp$.

III. Considere a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$Q(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz.$$

- Determine a matriz A da sua forma polar na base canónica de $\mathbb{R}^3$ e calcule $\text{rank } A$.
- Diagonalize a forma quadrática Q , exibindo explicitamente uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz de Q é diagonal.
- Esclareça qual a assinatura de Q e classifique Q quanto a ser definida, semidefinida, ou indefinida.

IV. Em $\mathcal{R}^3$ munido do referencial canónico, considere as entidades geométricas descritas pelas equações seguintes:

$$\alpha : (x, y, z) = (1 - a - b, a, b), \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \beta : \langle (1, 1, 1) \rangle, \quad \gamma : x + y = 1.$$

- Esclareça, justificando detalhadamente, a natureza de α , β , γ , e de $\alpha \cap \gamma$ (i.e., quais são retas, quais são planos, etc.).
- Esboce geometricamente os conjuntos referidos na alínea anterior.
- Determine o ângulo entre α e β .

FIM

RESOLUÇÃO

I.a) Sendo a matriz B uma matriz triangular, os seus valores próprios são os elementos da diagonal principal, pois se desenvolvermos $\det(B - \lambda I)$ ao longo de colunas verificamos que o polinómio característico é $p_B(\lambda) = (1 - \lambda)^3 \lambda$. Conclui-se também daqui que os valores próprios de B são $\lambda = 1$, com multiplicidade algébrica igual a 3, e $\lambda = 0$, com multiplicidade algébrica igual a 1.

A multiplicidade geométrica de cada valor próprio é a dimensão do espaço próprio correspondente. Observando que

$$(B - 0I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 \\ v_2 = -2v_3 \\ v_3 = -2v_4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

conclui-se que o espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = 0$ é

$$E_0 = \langle (-8, 4, -2, 1)^T \rangle.$$

Portanto, como este espaço tem dimensão igual a 1, a multiplicidade geométrica do valor próprio 0 é 1.

Analogamente, observando que

$$(B - 1I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_2 = 0 \\ 2w_3 = 0 \\ 2w_4 = 0 \\ -w_4 = 0 \end{cases},$$

conclui-se que o espaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda = 1$ é

$$E_1 = \langle (1, 0, 0, 0)^T \rangle.$$

e, portanto, a multiplicidade geométrica do valor próprio 1 de B é também igual a 1.

I.b) Atendendo aos resultados da alínea anterior, nomeadamente que existem apenas dois valores próprios distintos, 0 e 1, com $\text{mg}(0) = 1 = \text{ma}(0)$ e $\text{mg}(1) = 1 < 3 = \text{ma}(1)$, e sabendo que a matriz tem dimensão 4, conclui-se que as matrizes de Jordan semelhantes a B têm apenas dois blocos de Jordan, um de dimensão 3 com 1 na diagonal principal, e outro de dimensão 1, com 0 na diagonal principal. Uma matriz de Jordan possível é, então,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A outra possível matriz de Jordan corresponde apenas à permuta dos blocos na matriz acima.

I.c) Os vetores próprios de B já foram calculados na alínea a). Para conhecer a matriz M falta determinar quais são os valores próprios generalizados linearmente independentes

de B . Usando o vetor próprio $(1, 0, 0, 0)^T$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_2 = 1 \\ 2u_3 = 0 \\ 2u_4 = 0 \\ -u_4 = 0 \end{cases},$$

e, portanto, uma solução possível é $\mathbf{u} = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$. Usando este vetor próprio generalizado, obtém-se o outro vetor próprio generalizado da cadeia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2 = 0 \\ 2z_3 = \frac{1}{2} \\ 2z_4 = 0 \\ -z_4 = 0 \end{cases},$$

que tem como uma das suas soluções $\mathbf{z} = (0, 0, \frac{1}{4}, 0)^T$. Com isto temos todos os ingredientes para construir a matriz M correspondente à matriz J da alínea anterior:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

II.a) Para o produto interno usual tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\perp &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) | (1, 1, 1) = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\} \\ &= \{(a, b, -a - b), \forall a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

II.b) Pela alínea anterior, constatamos que $\mathbf{u}^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, de dimensão 2 e que uma sua base é constituída pelos vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$. Como estes vetores não são ortogonais para o produto interno canônico, para respondermos completamente à questão colocada temos de, a partir destes, obter uma base ortogonal, o que pode ser feito pelo algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Assim, partindo da base $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$, obtemos os seguintes vetores ortogonais:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1),$$

$$\mathbf{u}_2 = (0, 1, -1) - \frac{(0, 1, -1) | (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) | (1, 0, -1)} (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

Dividindo cada um destes vetores pela respetiva norma obtém-se uma base ortonormal de $\mathbf{u}^\perp$, a saber

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

$$\text{II.c) } \text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} | \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{1}{3} (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \text{proj}_{\mathbf{u}^\perp} \mathbf{v} = \mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

$$\text{III.a)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -\frac{25}{8} & 5 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{conclui-se que } \text{rank } A = 2.$$

III.b) Sendo $Q(1, 0, 0) = 2 \neq 0$ tem-se que $(1, 0, 0)$ não é autoconjugado. Tome-se $\mathbf{u}_1 := (1, 0, 0)$ para primeiro vetor da base. Observando que se $(x, y, z) \in \langle \mathbf{u}_1 \rangle^c$, então

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 4z = 0.$$

Tome-se $\mathbf{u}_2 \in \langle \mathbf{u}_1 \rangle^c$ não autoconjugado. Por exemplo: $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1)$.¹ Sendo $(x, y, z) \in \langle \mathbf{u}_2 \rangle^c$, então

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5y - 8z = 0.$$

Assim, $(x, y, z) \in \langle \mathbf{u}_1 \rangle^c \cap \langle \mathbf{u}_2 \rangle^c \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}z, y = \frac{8}{5}z$. Tome-se um vetor nestas condições, por exemplo, fazendo $z = 5$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 8, 5)$.

A base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ constituída pelos vetores $\mathbf{u}_j, j = 1, 2, 3$, definidos anteriormente é uma base nas condições pedidas. De facto, pode-se construir uma matrix P como sendo

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

e obtém-se, finalmente,

$$G_{pQ, \mathcal{B}} = P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III.c) Pelo que se fez na alínea anterior é imediato observar que Q tem assinatura $\text{sig}(Q) = (1, 1)$ e, consequentemente, é uma forma indefinida.

IV.a) $\alpha \in \mathcal{R}^3$ tem dois parâmetros reais livres e pode ser reescrito como $(x, y, z) = (1, 0, 0) + a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1)$, pelo que é um plano.

Como $\langle (1, 1, 1) \rangle = \{(x, y, z) = c(1, 1, 1), \forall c \in \mathbb{R}\}$, conclui-se que β é uma reta.

¹É imediato observar que este vetor satisfaz $4 \times 1 + 3 \times 0 - 4 \times 1 = 0$, sendo, portanto, um elemento de $\langle \mathbf{u}_1 \rangle^c$ e, por outro lado, satisfaz $Q(1, 0, 1) = -8 \neq 0$, pelo que não é autoconjugado.

Estando em $\mathcal{R}^3$, a equação $x + y = 1$ define um plano (paralelo ao eixo dos zz).

Para saber o que é $\alpha \cap \gamma$ basta observar que se um ponto de α satisfaz também a equação que define γ então $(1 - a - b) + a = 1$, ou seja $b = 0$. Portanto, os pontos de $\alpha \cap \gamma$ são $(1 - a, a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, ou seja $(1, 0, 0) + a(-1, 1, 0)$, pelo que o conjunto em causa é uma reta.

IV.b) Atendendo ao exposto na alínea anterior, os esboços dos subconjuntos de $\mathcal{R}^3$ em causa são os apresentados na figura seguinte.

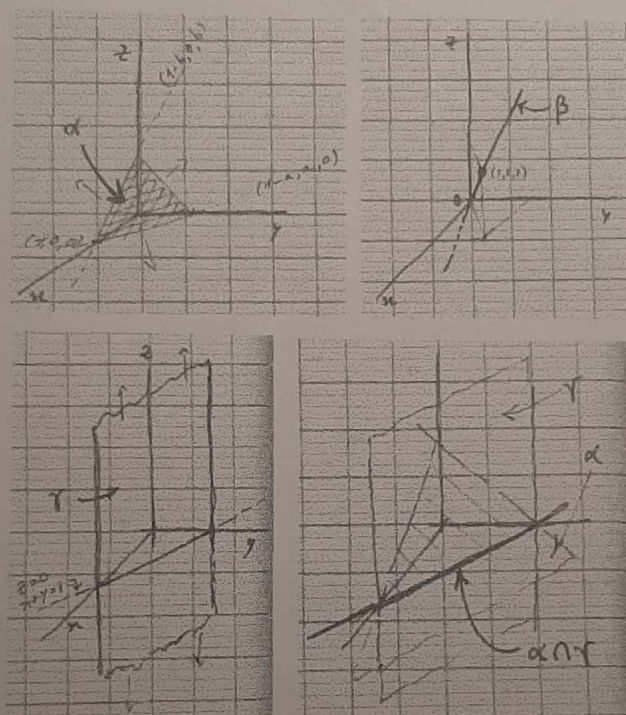


Figura 1: Esboços geométricos dos conjuntos α, β, γ e $\alpha \cap \gamma$. Para facilitar a leitura o conjunto α só é esboçado no primeiro octante e o conjunto γ só é esboçado nos dois octantes com $x \geq 0, y \geq 0$.

IV.c) Observando que o plano α pode ser escrito como $(1, 0, 0) + \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$, constata-se imediatamente que $(1, 1, 1) \in \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle^\perp$ (basta observar que o produto interno de $(1, 1, 1)$ por qualquer dos outros dois vetores é igual a zero. Portanto β é ortogonal a α , ou seja, o ângulo em causa é $\frac{\pi}{2}$.