

**U.C. 21076**

**INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL**

Ano Letivo: 2015/2016

## **TESTE FORMATIVO**

**Para resolver este Teste, o estudante poderá consultar o Formulário de Filas de Espera e Tabela da f.d.a. da Distribuição Normal Reduzida**

### **I**

Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } F = 2x - 2y$$

$$\text{s. a: } x - y \leq 2$$

$$3x + 2y \geq 12$$

$$x, y \geq 0$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Escreva o problema na “forma standard”.
- c) Como classifica o espaço de soluções admissíveis deste problema?
- d) Resolva o problema pelo Algoritmo do Simplex.
- e) Que dados do quadro óptimo do simplex, lhe permitem identificar o tipo de solução óptima que obteve?

## II

A “Tabacaria do Bairro” é muito pequena, mas procurada pelos seus fieis clientes, que chegam segundo um processo Poissoniano com taxa média de 20 chegadas por hora. Sabe-se que a duração do atendimento se pode considerar exponencialmente distribuída, com valor médio igual a 2 minutos.

Na “Tabacaria do Bairro” o dono não tem empregados para atender os seus clientes; ele mesmo assegura o seu atendimento. O dono da tabacaria já descobriu que, devido ao espaço reduzido para o atendimento, quando se encontram 4 clientes no interior da tabacaria, potenciais clientes não chegam a entrar e optam pela concorrência: a ”Nova Tabacaria” é muito ampla e situa-se a 50 metros ...

- a) Determine a probabilidade de não haver qualquer cliente na “Tabacaria do Bairro”.
- b) Determine a probabilidade de haver quatro clientes na “Tabacaria do Bairro”.
- c) Determine o número médio de clientes no interior da “Tabacaria do Bairro”.
- d) Determine a taxa de ocupação do dono da “Tabacaria do Bairro”, com o atendimento dos clientes.
- e) Determine o valor da receita média perdida mensalmente, face aos clientes que desistem de entrar na “Tabacaria do Bairro” por se encontrar cheia. Assuma que a tabacaria está aberta 10 horas por dia, 24 dias por mês e que a receita média por cliente se cifra em 3,00 €.

## Formulário de Filas de Espera

<b>Sistema M/M/1, População = <math>\infty</math> ; Fila máxima = <math>\infty</math></b>
<p>Processo de <b>chegadas</b> Poissoniano com uma taxa de chegadas de <math>\lambda</math> clientes por unidade de tempo.</p> <p>Duração do <b>serviço</b> com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de <math>\mu</math> clientes por unidade de tempo (pelo <b>único servidor</b>)</p> <p>Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)</p>
<p>Taxa de <b>ocupação</b> <math>\rho = \lambda / \mu</math> (<math>\rho &lt; 1</math>)</p> <p>Taxa de <b>desocupação</b> = <math>1 - \rho = P_0 = P(W_q = 0)</math></p>
$L = L_q + \lambda / \mu$ $L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ $L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
$W = W_q + 1 / \mu$ $W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$ $W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$
$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$ $P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$ $P(n > k) = \rho^{k+1}$ $P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$ $P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$

**Sistema M/M/S, População =  $\infty$  ; Fila máxima =  $\infty$**

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas  $\lambda$  de clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 0, 1, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação**  $\rho = \lambda / (S \mu)$  ( $\rho < 1$ )

Taxa de **desocupação** =  $1 - \rho$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + 1 / \mu = L / \lambda$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$P_0 = \left[ \frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S + 1, \end{cases}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu t} \left[ 1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-\mu t (S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \text{ para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t (1-\rho)} \text{ para } t \geq 0$$

$$P(W_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

**Sistema M/M/1/K, População = ∞ ; Fila máxima = K - 1**

**Número máximo de clientes no sistema = K**

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema dependente do estado  $n$  do sistema (isto é, do número  $n$  de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de  $\mu$  clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**)  
Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão**  $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de **ocupação**  $= \bar{\lambda} / \mu$

Taxa de **desocupação**  $= 1 - \bar{\lambda} / \mu = P_0 = P(W_q = 0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \bar{\lambda}$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ K/2 & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

**Sistema M/M/S/K, População = ∞ ; Fila máxima = K - S**

**S ≤ K; N° máximo de clientes no sistema=K; N° de servidores=S**

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado  $n$  do sistema (isto é, do número de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos  $S$  servidores:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão**  $\rho = \lambda / (S \mu)$

Taxa de **ocupação** =  $\bar{\lambda} / (S \mu)$

Taxa de **desocupação** =  $1 - \bar{\lambda} / (S \mu)$

$$P_0 = \begin{cases} \left[ \frac{S^S \rho^{S+1} (1 - \rho^{K-S})}{S!(1 - \rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[ \frac{S^S}{S!} (K - S) + \sum_{n=0}^S \frac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S + 1, \dots, K \\ 0 & ; n \geq K + 1 \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1 - \rho)^2} \left[ 1 - \rho^{K-S} - (1 - \rho)(K - S)\rho^{K-S} \right]$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu ; L = \bar{\lambda} W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

**Sistema M/M/S/N, População = N (Fila máxima = N - S)**

$S \leq N$ ; N° máximo de clientes no sistema=N; N° de servidores=S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas  $\lambda$  de clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado  $n$  do sistema (isto é, do número de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} ; \bar{\lambda} = \lambda(N-L)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos  $S$  servidores

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** =  $\bar{\lambda} / (S\mu)$

Taxa de **desocupação** =  $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^N \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular  $S = 1$ :

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} = \text{taxa de desocupação}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = S+1, \dots, N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

Caso particular  $S = 1$ :

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, N \\ 0 & ; n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

- contin

- continuação -

$$L_q = \sum_{n=0}^N (n - S) P_n$$

Caso particular  $S = 1$ :

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu ; L = \bar{\lambda} W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$





