UNIVERSIDADE
AbERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

p-Fólio

U.C. 21089
Processos Estocásticos Aplicados

28 de setembro de 2015

- INSTRUÇÕES -

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O p-fólio é composto por 2 grupos de questões, contém 1 página e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 2 grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2
Cotação	7.0	5.0

1. Considere uma cadeia de Markov homogénea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ com espaço de estados $\{0,1\}$ e cuja matriz de probabilidade de transição a um passo é dada por

$$\begin{bmatrix} 0.2 & a \\ b & 0.4 \end{bmatrix}$$

1.1. Determine a probabilidade de transição a um passo do estado 0 para o estado 1.

1.2. Calcule
$$P[X_{n+2} = 0 \,|\, X_n = 0, X_{n+1} = 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.3. Determine a probabilidade de 1.º retorno ao estado 0 em 5 passos.

1.4. Prove que a cadeia de Markov $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ é aperiódica.

2. Considere um processo $\{X_t : t \geq 0\}$ de nascimento puro a taxa de natalidade $\lambda_i = i\lambda$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Neste caso, a solução das equações de Kolmogorov progressivas é dada por

$$\begin{aligned} p_{i,i}(t) &= e^{-\lambda_i t}, \\ p_{i,j}(t) &= e^{-\lambda_j t} \int_0^t e^{\lambda_j s} \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(s)\, ds, \quad j > i. \end{aligned}$$

2.1. Mostre que
$$p_{i,j}(t) = \binom{j-1}{j-i} e^{-\lambda t i} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{j-i}, \quad j \geq i.$$

2.2. Verifique se existe distribuição limite e, em caso afirmativo, determine-o.

FIM