

Estado	Terminadas
Iniciado em	sábado, 11 outubro 2025, 16:16
Completado em	domingo, 12 outubro 2025, 22:00
Tempo usado	1 dia 5 horas
valores	2,00/2,00
Avaliação	1,00 num máximo de 1,00 (100%)

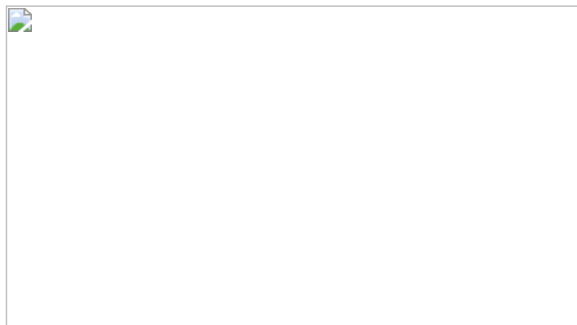
Agora que revisamos as definições de lógica, vamos aprender um pouco sobre os números reais.

Já ouviu falar em axiomas?

Axiomas são afirmações fundamentais e autoevidentes que servem como base para a construção de um sistema de conhecimento, como a matemática ou a lógica. Eles são aceitos como verdadeiros sem necessidade de demonstração, funcionando como pontos de partida a partir dos quais outras proposições (teoremas) são deduzidas e provadas.

Uma teoria axiomática do conjunto dos números reais pode ser feita considerando os números reais como conceitos primitivos verificando um certo número de propriedades que se tomam como axiomas.

 Saiba mais sobre axiomas neste vídeo externo:



Os axiomas dividem-se em 3 grupos: axiomas de corpo, axiomas de ordem e axioma do extremos superior.

Axiomas de corpo

O que é um corpo na matemática?

Um corpo (do inglês "*field*") é um conjunto onde duas operações, chamadas adição e multiplicação, satisfazem um conjunto de axiomas semelhantes aos dos números reais ou racionais. Estes axiomas garantem que:

- **Adição:** O conjunto forma um grupo abeliano em relação à adição.
- **Multiplicação:** O conjunto, excluindo o elemento neutro da adição (o zero), forma um grupo abeliano em relação à multiplicação.
- **Distributividade:** A multiplicação é distributiva em relação à adição.

Alguns exemplos de corpos:

- **Números Racionais ($\mathbb{Q}$):** O conjunto de todas as frações de inteiros.
- **Números Reais ($\mathbb{R}$):** O conjunto de todos os números reais, incluindo irracionais como π e $\sqrt{2}$.
- **Números Complexos ($\mathbb{C}$):** Números que incluem uma parte real e uma parte imaginária.

Voltemos aos números reais, tema desta parte do Módulo. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está munido de 2 operações, adição e multiplicação, cujas propriedades vão agora ser tomadas como axiomas:

A ₁ : A Adição é uma lei de composição interna	$\forall x, y \in \mathbb{R} \exists^1 z \in \mathbb{R} : z = x + y$	Axiomas de adição
A ₂ : A adição é associativa	$\forall x, y, z \in \mathbb{R} (x + y) + z = x + (y + z)$	Axiomas de adição
A ₃ : A adição é <u>comutativa</u>	$\forall x, y \in \mathbb{R} x + y = y + x$	Axiomas de adição
A ₄ : Existe elemento neutro para a adição em $\mathbb{R}$: o número 0	$\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x + 0 = 0 + x = x$	Axiomas de adição
A ₅ : Todo o número real admite oposto real para a adição	$\forall x \in \mathbb{R} \exists x' \in \mathbb{R} : x + x' = x' + x = 0$	Axiomas de adição
A ₆ : A multiplicação é uma lei de composição interna	$\forall x, y \in \mathbb{R} \exists^1 z \in \mathbb{R} : z = x \cdot y$	Axiomas de multiplicação
A ₇ : A multiplicação é associativa	$\forall x, y, z \in \mathbb{R} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	Axiomas de multiplicação
A ₈ : A multiplicação é <u>comutativa</u>	$\forall x, y \in \mathbb{R} x \cdot y = (y \cdot x)$	Axiomas de multiplicação
A ₉ : Existe elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$, o número 1	$\exists 1 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$	Axiomas de multiplicação
A ₁₀ : Todo o número real diferente de zero admite oposto real para a multiplicação	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x' \in \mathbb{R} : x \cdot x' = x' \cdot x = 1$	Axiomas de enlace

A ₁₁ : A multiplicação é distributiva em relação à adição	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	Axiomas de enlace
--	---	-------------------

Estes axiomas conferem a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a estrutura de corpo e consequentemente, todas as propriedades dos corpos já estudadas são verdadeiras em $\mathbb{R}$.

Axiomas de ordem

Os axiomas de ordem são princípios fundamentais que estabelecem a existência e as propriedades de uma relação de ordem, como "maior" ou "menor", em um conjunto. Para o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), os axiomas de ordem garantem que para dois números positivos, sua soma e produto também são positivos.

Admite-se que existe um conjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ (os números reais positivos) que verifica os dois axiomas seguintes.

A ₁₂ : Se x e y pertencem a $\mathbb{R}^+$, o mesmo acontece a $x + y$ e $x \cdot y$	$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^+$	Axiomas de ordem
A ₁₃ : Zero não pertence a $\mathbb{R}^+$ e dado um número real diferente de zero ou esse número ou o seu simétrico pertencem a $\mathbb{R}^+$	$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}^+ \vee -x \in \mathbb{R}^+$	Axiomas de ordem

Estes axiomas conferem a $\mathbb{R}$ a **estrutura de corpo ordenado**. Os símbolos $<$, $>$, $\leq$ e $\geq$ definem-se do seguinte modo:

- $x < y$ significa $y - x \in \mathbb{R}^+$
- $y > x$ significa $x < y$
- $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$
- $y \geq x$ significa $x \leq y$

Estamos agora em condições de demonstrar todas as regras de cálculo relativas às desigualdades.

Exercício resolvido

Vamos ajudar o Miguel a programar uma função que compara dois valores reais, a e b ?

Ele vai testar se as operações matemáticas que usa respeitam os axiomas de corpo e de ordem.

Considere os seguintes valores:

$$a = 3$$

$$b = 5$$

O Miguel vai testar vários axiomas para estes valores.

Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras:

I) $a + b = b + a$

Resolução:

$$a + b = 3 + 5 = 8$$

$$b + a = 5 + 3 = 8$$

Resposta:

Verdadeiro — Neste caso testamos que a adição é comutativa (Axioma de corpo - A₂).

II) $a \cdot (b + 2) = a \cdot b + a \cdot 2$

Resolução:

$$a \cdot (b + 2) = 3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 7 = 21$$

$$a \cdot b + a \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 15 + 6 = 21$$

Resposta:

Verdadeiro — Testamos que a multiplicação distribui sobre a adição (Axioma de corpo - A₁₁).

III) Se $a < b$, então $a + 1 < b + 1$

Resolução:

$$a < b \Leftrightarrow 3 < 5$$

$$a + 1 = 4, b + 1 = 6$$

$$4 < 6$$

Resposta:

Verdadeiro — testamos que adicionar o mesmo número a ambos os lados preserva a ordem (Axioma de ordem - A₁₂).

IV) Se $a < b$, então $a \cdot 2 < b \cdot 2$

Resolução:

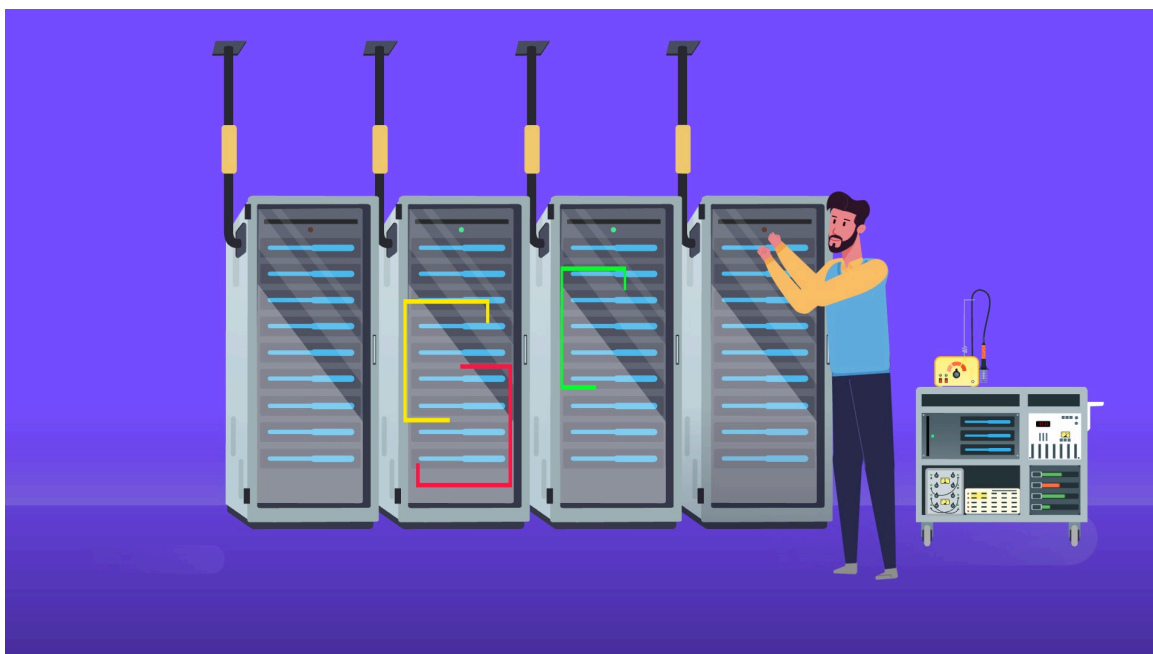
$$a \cdot 2 = 6, b \cdot 2 = 10$$

$$6 < 10$$

Resposta:

Verdadeiro — testamos que multiplicar ambos os lados por um número positivo preserva a ordem (Axioma de ordem - A_{12}).

Miguel testou para estes valores que as operações que usou respeitam os axiomas de corpo e de ordem dos números reais. Isso dá-lhe confiança para aplicar estas propriedades na programação de algoritmos matemáticos.



O Miguel está um pouco tenso porque um dos servidores da escola está com um mau tempo de resposta. Ele precisa analisar o desempenho de um sistema informático que regista o tempo de resposta do servidor, medido em segundos. Ele recolheu os seguintes dados de tempo de resposta ao longo de vários dias:

$$\mathbb{S} = \{1.8, 2.1, 2.4, 2.5, 2.6\}$$

Para perceber melhor estes resultados, o Miguel deverá conhecer alguns conceitos relacionados aos axiomas. O primeiro deles é o conceito de **majorante** (limite superior). Um majorante de um conjunto de números reais é **qualquer número que seja maior ou igual a todos os elementos do conjunto**.

Para o conjunto de "segundos" que o Miguel tem, o número 3 é um **majorante** de $\mathbb{S}$, porque $3 \geq 2.6$, e 2.6 é o maior valor do conjunto. Poderíamos ter outros números além do 3, por exemplo, 4, 10... Logo, temos a expressão:

$$x \leq 3, \forall x \in \mathbb{S}$$

O número 2.6 também é um majorante — e neste caso, é o **menor dos majorantes possíveis**, ou seja, o **supremo** ou **extremo superior**. Um número **b** diz-se extremo superior ou supremo dum conjunto $\mathbb{S}$, não vazio, se possui as propriedades seguintes:

- b é um majorante de $\mathbb{S}$;
- nenhum número menor que b é majorante de $\mathbb{S}$.

O número 2.6 é também o máximo do conjunto tempo de resposta obtido por Miguel. O **máximo** é o **maior elemento que pertence ao conjunto**: $\max(\mathbb{S}) = 2.6$

O **supremo** é o menor dos majorantes. Se o máximo existir, então o supremo é igual ao máximo.

E o menor número do conjunto, quem é? Um **minorante** é **qualquer número menor ou igual a todos os elementos do conjunto, mesmo que não pertença ao conjunto**.

Exemplos de minorantes de $\mathbb{S}$: 1.8 (mínimo e também minorante), 1, 0, -5 (todos menores que 1.8)

Logo, temos a expressão:

$$x \geq 1.8, \forall x \in \mathbb{S}$$

O **ínfimo** é o **maior dos minorantes**. Se o mínimo existir, então o ínfimo é igual ao mínimo. No caso de Miguel: $\inf(\mathbb{S}) = 1.8$

O **mínimo** é o **menor elemento que pertence ao conjunto**. No caso de Miguel: $\min(\mathbb{S}) = 1.8$

Conceito	Valor em $\mathbb{S}$	Pertence ao conjunto
Máximo	2.6	Sim
Supremo	2.6	Sim
Majorante	≥ 2.6	Nem sempre
Mínimo	1.8	Sim
Ínfimo	1.8	Sim

Minorante	≤ 1.8	Nem sempre
-----------	------------	------------

De posse destas informações, conseguimos perceber o conceito de Axioma do extremo superior. Vamos a isso?

Axioma do extremo superior

Este axioma que se verifica em $\mathbb{R}$ e não em $\mathbb{Q}$, é da máxima importância. Há quem lhe chame também axioma de completude ou de continuidade, porque **atribui ao conjunto dos números reais uma propriedade de continuidade**. Em $\mathbb{R}$ não há "falhas".

A ₁₄ : Todo o conjunto não vazio de números reais, S , que é limitado superiormente, tem supremo em $\mathbb{R}$	Axioma de completude
---	----------------------

O conjunto $\mathbb{R}$ fica agora com a estrutura de corpo ordenado e completo.



Hoje o Miguel está a verificar a qualidade da rede Wi-Fi na escola onde trabalha.

Ele mede a intensidade do sinal em diferentes salas, comparando com o **valor ideal de referência, que é -50 dBm** (decibéis-miliwatts).

Ele obtém os seguintes valores:

- Sala de Matemática: -47 dBm
- Sala de Física: -53 dBm
- Laboratório de Informática: -50 dBm

Para avaliar quão distante cada medição está do valor ideal, Miguel usa o **valor absoluto da diferença**. Ele aprendeu a calcular o valor absoluto nas aulas de Análise Infinitesimal no curso de LEI da UAb.

Vamos aprender um pouco sobre este assunto?

Chama-se **valor absoluto** de um número real **a distância desse número até o zero na reta real**, sem considerar o sinal.

Para qualquer número real x , o valor absoluto ou módulo de um número real x é definido como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos tentar tornar ainda mais palpável com um exemplo:

Imagine-se numa trilha representada por uma reta numérica. Começa no ponto 0.

Se anda 3 passos para a direita, está no ponto +3. Se anda 3 passos para a esquerda, está no ponto -3.

Em ambos os casos, a distância percorrida é 3 unidades. Ou seja:

$$|+3| = 3 \quad \text{e} \quad |-3| = 3$$

Em outras palavras, **o valor absoluto mostra quanto se afastou do ponto inicial, independentemente da direção**.

Vamos conhecer algumas propriedades importantes para compreender melhor o valor absoluto.

1. Sempre não-negativo:

$$|x| \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

No exemplo da trilha, nunca pode haver uma distância negativa.

2. Multiplicação

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Multiplica dois números, o valor absoluto do produto é o produto dos valores absolutos.

Se $a = -2$ e $b = 5$, então:

$$|-2 \cdot 5| = |-10| = 10 \quad \text{e} \quad |-2| \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10$$

3. Valor absoluto da soma

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Desigualdade triangular})$$

A distância total pode ser menor ou igual à soma das distâncias individuais.

Se $a = -4$ e $b = 2$, então:

$$|-4 + 2| = |-2| = 2 \quad \text{e} \quad |-4| + |2| = 4 + 2 = 6$$

4. Quadrado do valor absoluto:

$$|x|^2 = x^2$$

O valor absoluto ao quadrado é o mesmo que elevar o número ao quadrado.

Conhecendo o valor absoluto de um número, um engenheiro informático poderá calcular:

- **Distâncias entre dois pontos:**

$$\text{Distância} = |a - b|$$

- **Equações com valor absoluto:**

Se encontra $|x| = 5$, sabe que $x = 5$ ou $x = -5$

- **Inequações:**

Se $|x| < 3$, percebe que $-3 < x < 3$

Então, voltemos a situação inicial do Miguel e vamos calcular quão distante cada medição está do valor ideal.

$$\text{Sala de Matemática: } |-47 - (-50)| = |-47 + 50| = |3| = \mathbf{3 \text{ dBm}}$$

$$\text{Sala de Física: } |-53 - (-50)| = |-53 + 50| = |-3| = \mathbf{3 \text{ dBm}}$$

$$\text{Laboratório de Informática: } |-50 - (-50)| = |0| = \mathbf{0 \text{ dBm}}$$

Miguel conclui que:

- A Sala de Matemática e a Sala de Física estão igualmente distantes do ideal, embora uma tenha sinal mais forte e outra mais fraco.
- O Laboratório de Informática está exatamente no valor ideal.

Miguel pode usar essa análise para:

- Priorizar ajustes nas salas com maior desvio.
- Automatizar relatórios com *scripts* que calculam essas diferenças usando funções como `abs()` em Python.

Agora é a sua vez de praticar!

Faça os exercícios propostos e se tiver dúvidas, poste no fórum Dúvidas. Em breve a equipa docente responderá à sua dúvida.

Deixamos alguns exercícios resolvidos para lhe ajudar.

Pode passar adiante e, se tiver dificuldade, voltar aqui para ver como resolvê-los.

Ou pode acompanhar estes exercícios com calma e só então resolver os demais.

Exercício resolvido 1:

Resolver em $\mathbb{R}$:

$$|2x - 3| < 5$$

Consideremos sucessivamente:

- $2x - 3 \geq 0$,
- $2x - 3 < 0$

A primeira condição é equivalente a $x \geq \frac{3}{2}$, o que equivale a $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Sob esta condição temos $|2x - 3| = 2x - 3$ e a inequação fica

$$2x - 3 < 5 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4.$$

Portanto para a primeira condição a solução é $[\frac{3}{2}, 4[$.

A segunda condição é equivalente a $x < \frac{3}{2}$ e neste caso $|2x - 3| = -(2x - 3) = -2x + 3$ e a inequação fica $-2x + 3 < 5 \Leftrightarrow -2x < 2 \Leftrightarrow x > -1$

Portanto para a segunda condição a solução é $] -1, \frac{3}{2}[$

Assim o conjunto solução é $[\frac{3}{2}, 4[\cup] -1, \frac{3}{2}[$

$$=] -1, 4[$$

Exercício resolvido 2:

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x^2 + x| < 1$.

Consideramos primeiro a condição $x^2 + x \geq 0$. Resolvemos a inequação segundo o método conhecido do secundário para obter solução $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$.

Com esta restrição temos $|x^2 + x| = x^2 + x$ e a inequação fica $x^2 + x > 1$ o que equivale a $x^2 + x - 1 > 0$.

Resolvendo obtemos $] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$. Tomando a interseção com $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ obtemos $] \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1] \cup [0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

Considerando agora a outra condição $x^2 + x < 0$ o método de resolução é semelhante.

Pergunta 1

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Resolva em $\mathbb{R}$:

$$|-3x + 6| = 6$$

 $\{0, 4\}$ 

$$|x - 1| \cdot |3x - 2| = 2$$

 $\{0, 5/3\}$ 

$$|x + 2| = 5 \cdot |3x|$$

 $\{-1/8, 1/7\}$ 

$$|x| = 3$$

 $\{-3, 3\}$ 

$$|2x - 5| = 4$$

 $\{1/2, 9/2\}$ 

A sua resposta está correta.

A resposta correcta é: $|-3x + 6| = 6 \rightarrow \{0, 4\}$, $|x - 1| \cdot |3x - 2| = 2 \rightarrow \{0, 5/3\}$, $|x + 2| = 5 \cdot |3x| \rightarrow \{-1/8, 1/7\}$, $|x| = 3 \rightarrow \{-3, 3\}$, $|2x - 5| = 4 \rightarrow \{1/2, 9/2\}$

Pergunta 2

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

Resolva em $\mathbb{R}$:

$$|x - 12/x| > 1$$

 $] -\infty, -4[\cup] -3, 0[\cup] 0, 3[\cup] 4, +\infty[$ 

$$|x^2 - 3/2| \geq 5/2$$

 $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ 

$$|1 - 3/x| \leq 2$$

 $] -\infty, -3] \cup [1, +\infty[$ 

$$|1 - 4x^2| < 3$$

 $] -1, 1[$ 

$$|x^2 + x| > 2$$

 $] -\infty, -2[\cup] 1, +\infty[$ 

A sua resposta está correta.

A resposta correcta é: $|x - 12/x| > 1 \rightarrow] -\infty, -4[\cup] -3, 0[\cup] 0, 3[\cup] 4, +\infty[$, $|x^2 - 3/2| \geq 5/2 \rightarrow] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, $|1 - 3/x| \leq 2 \rightarrow] -\infty, -3] \cup [1, +\infty[$, $|1 - 4x^2| < 3 \rightarrow] -1, 1[$, $|x^2 + x| > 2 \rightarrow] -\infty, -2[\cup] 1, +\infty[$