

Nome: .....

B. I.: ..... N° de Estudante: .....

Curso: ..... Turma: .....

Unidade Curricular: Matemática Finita Código: 21082

Data: ..... Ano Lectivo: 2014/15

Docente: Maria João Oliveira Classificação: .....

O e-Fólio é uma prova TOTALMENTE individual. A suspeita fundamentada de cópia, ou de plágio, é motivo de anulação imediata do mesmo.

### PARA A RESOLUÇÃO DO e-Fólio A, ACONSELHA-SE QUE:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores) e preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por 8 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra FIM. Responda às questões de escolha múltipla no espaço destinado a esse efeito. As suas respostas às restantes questões não devem ultrapassar 6 páginas.
- Escreva sempre com uma letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto, a folha das escolhas múltiplas e as suas restantes respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio A” até ao dia 20 de Abril.

### CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1-3	ERRADAS				
C	0	0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	<b>0.9</b>			

4.	5.	6.	7	8
<b>0.5 val.</b>	<b>1.0 val.</b>	<b>0.6 val.</b>	<b>0.5 val.</b>	<b>0.5 val.</b>

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sabendo que se podem formar 10 subconjuntos de três elementos da forma  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $2 \leq x_1, x_2, x_3 \leq k$ , podemos concluir que

a)  $k = 5$

c)  $k = 7$

b)  $k = 6$

d)  $k = 8$

2. Dados  $0 \leq k < n$ , a diferença

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k}$$

não é igual a

a)  $\binom{n}{k+1}$

c)  $\binom{n}{n-k-1}$

b)  $\binom{n}{n-k}$

d)  $\frac{n}{k+1} \binom{n-1}{k}$

3. Dados dois conjuntos finitos  $X$  e  $Y$ ,  $\#X < \#Y$ , relativamente aos conjuntos

$$\mathcal{P}((X \times \{a\}) \times Y) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(X \times Y)$$

podemos afirmar:

a) Se  $a \in X$ ,  $\#(\mathcal{P}(X \times Y)) = \#(\mathcal{P}((X \times \{a\}) \times Y))$

b) Se  $a \notin X$ ,  $\#(\mathcal{P}(X \times Y)) < \#(\mathcal{P}((X \times \{a\}) \times Y))$

c) Quer  $a \in X$ , quer  $a \notin X$ , tem-se sempre  $\#(\mathcal{P}(X \times Y)) = \#(\mathcal{P}((X \times \{a\}) \times Y))$

d) Independentemente de  $a \in X$ , ou não, tem-se sempre  $\#(\mathcal{P}(X \times Y)) < \#(\mathcal{P}((X \times \{a\}) \times Y))$

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4. Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  não vazios, considere as aplicações  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}$  e  $g : \mathbb{Q} \rightarrow Y$  tais que a função composta  $g \circ f$  é sobrejectiva.

Nestas condições, prove que o conjunto  $Y$  é enumerável.

5. Entre 200 estudantes das Licenciaturas em Informática e em Matemática e Aplicações, 80 estão inscritos em Matemática Finita, 80 em Álgebra Linear I e 80 estão inscritos em Investigação Operacional. O número de estudantes inscritos simultaneamente em quaisquer duas destas unidades curriculares é 30 e o número de estudantes inscritos nestas três unidades curriculares é igual a 15. Determine:

5.1. O número total de estudantes que não estão inscritos em nenhuma destas unidades curriculares.

5.2. O número de estudantes inscritos apenas em Matemática Finita.

6. Considere três números naturais  $a, b, c \in \{1, 2, \dots\}$  tais que  $a - b > 0$  e  $c$  é um divisor de  $a - b$ .

Por recurso ao método de indução matemática, mostre que  $c$  é um divisor de  $a^n - b^n$ ,  $n \geq 1$ .

7. Considere um conjunto de  $n$  homens e  $n$  mulheres a partir do qual escolhem-se subconjuntos com igual número (possivelmente zero) de homens e de mulheres. Para cada um destes subconjuntos, escolhe-se um líder para os homens e um líder para as mulheres.

Indique quantos subconjuntos diferentes é que se podem formar nestas condições.

8. Sem utilizar o método de indução matemática, prove que

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}, \quad n \geq 1.$$

FIM