21165 - Geometria

Ano lectivo 2017/18
Docente: António Araújo

e-fólio B (16 a 24 de Maio)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 3 problemas e termina com a palavra FIM.
- Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar a sua resolução de forma legível, ou executá-la directamente em formato digital (aceita-se word, pdf, ou scans em jpeg, png ou tiff - se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip). Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. O problema 1 vale 1 valor e os demais valem 1,5 valores cada.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- Nº de Estudante'
- Curso:

Problema 1. *Demonstre que quaisquer dois planos perpendiculares a uma mesma recta são paralelos.*

Solução: Suponhamos que a recta l é perpendicular ao plano Π no ponto P e ao plano Π' no ponto Q. Por absurdo, suponhamos que os planos Π e Π' não são paralelos. Então seja R um ponto na intersecção dos dois planos. P, Q, R definem um plano. Nesse plano, consideramos o triângulo $\triangle PQR$. Como $l = \overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular ao plano Π, então é perpendicular a $\overleftrightarrow{PR}$. Então $\angle RPQ$ é um ângulo recto. Como l é perpendicular ao plano Π', então é perpendicular a $\overleftrightarrow{QR}$. Então $\angle RPQ$ é um ângulo recto. Então dois dos ângulos do triângulo são ângulos rectos, o que é impossível.

nota: em alternativa, no último passo podíamos usar o teorema dos ângulos alternos internos (pag 52 do manual), e provar que as rectas $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{QR}$ são paralelas, já que são ambas cortadas por $\overleftrightarrow{PQ}$ e formam com ela ângulos alternos internos congruentes (rectos). Mas se são paralelas, isto é absurdo, porque assumimos que se intersectavam em R.

Problema 2. *Existe uma função distância d_M e uma medição angular m_M tais que o plano de Moulton (ver página 20 do manual), munido de d_M e m_M verifica os axiomas $A_1 - A_8$. Recordamos aqui a definição de d_M:*

Sendo d_E a distância no plano cartesiano real,

$d_M(P, Q) = d_E(P, Q)$ se P e Q têm abcissas nulas ou do mesmo sinal, ou uma nula e outra não nula.

$d_M(P, Q) = d_E(P, R) + d_E(R, Q)$ se P e Q têm abcissas de sinal contrário, onde R é o único ponto em que $\overleftrightarrow{PQ}$ corta o eixo das ordenadas.

Não explicitamos aqui a forma de m_M, mas dizemos apenas que m_M coincide com a medição angular m_E do plano cartesiano real sempre que o ângulo em causa não tenha o vértice sobre o eixo das ordenadas.

Com estes dados:

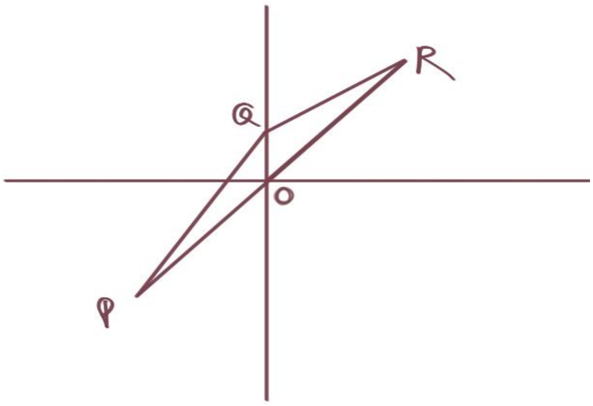
a) Mostre que no plano de Moulton não se verifica a desigualdade triangular.

b) Explique porque é que a alínea anterior implica que o axioma LAL é independente de $A_1 - A_8$.

c) Mostre directamente, através de um exemplo com dois triângulos adequados, que o axioma LAL falha no plano de Moulton (o que seria outra prova da independência do axioma LAL).

solução:

a) Podemos considerar qualquer triângulo de Moulton da forma descrita pela imagem que se segue:



onde as semi-rectas $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ estão sobre a mesma recta de Moulton, e as semi-rectas $\overline{PO}$ e $\overline{OR}$ formam duas semi-rectas de Moulton que não pertencem à mesma recta de Moulton mas que pertencem à mesma recta cartesiana. Então, porque a desigualdade triangular é verificada no plano cartesiano, temos

$$d_E(P, Q) + d_E(Q, R) > d_E(P, R)$$

Mas

$$d_E(P, R) = d_E(P, O) + d_E(O, P) = d_M(P, O) + d_M(O, P)$$

e

$$d_E(P, Q) + d_E(Q, R) = d_M(P, Q)$$

pelo que a primeira desigualdade é equivalente a

$$d_M(P, Q) > d_M(P, O) + d_M(O, P)$$

pelo que o modelo de Moulton não verifica a desigualdade triangular. Pode-se mesmo dizer que o plano de Moulton não verifica a desiguadade triangular precisamente porque o plano cartesiano verifica-a.

Uma forma mais particular de mostrar isto é considerar explícitamente o exemplo em que $P = (-1, -1)$, $R = (1, 1)$.

A recta de Moulton que une P e Q é obtida resolvendo o sistema

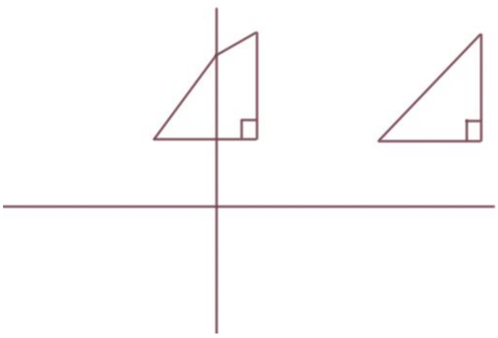
$$\begin{cases} -1 = m(-1) + b \\ 1 = (m/2)(1) + b \end{cases}$$

de onde se tira $m = 4/3, b = 1/3$.

Ora, $d_M(P,O) + d_M(O,R) = d_E(P,O) + d_E(O,R) = 2\sqrt{2} < \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} = d_E(P,Q) + d_E(Q,R) = d_M(P,Q)$, em contradição com a desigualdade triangular.

b) Na página 180 do manual vemos que $A_1 - A_8$ mais LAL provam a desigualdade triangular. Mas Moulton verifica $A_1 - A_8$. Então como a desigualdade triangular falha no plano de Moulton, LAL tem que falhar no plano de Moulton, e, consequentemente, LAL tem que ser independente de $A_1 - A_8$.

c) LAL falha por exemplo na figura abaixo apresentada. Os dois triângulos têm em comum o ângulo recto e as medidas dos catetos, pelo que se verificam as condições de LAL. No entanto a hipotenusa tem medidas distintas, o que contradiz o axioma LAL.



Problema 3. *Recorde a definição do plano Pombalino (ver Af2). Generalize a definição para o caso espacial. Diga qual a definição natural de distância Pombalina d_P em $\mathbb{R}^3$, e obtenha um sistema de coordenadas para uma recta genérica de $\mathbb{R}^3$. Determine a forma da superfície esférica Pombalina de raio r e centro em $O = (0,0,0)$, como o lugar geométrico dos pontos Q tais que $d_P(Q,r) = r$. Ilustre essa forma com um desenho adequado, explique de quantas faces planas é composta, diga quantas intersecções tem com a esfera euclideana do mesmo raio, e descreva as suas intersecções com os planos $x = 0, y = 0, z = 0$.*

Solução:

A distância Pombalina entre dois pontos do espaço, $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$, é dada por

$$d_P(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

Uma recta em $\mathbb{R}^3$ pode ser parametrizada por

$$\begin{cases} x = a_1 + b_1 t \\ y = a_2 + b_2 t \\ z = a_3 + b_3 t \end{cases}$$

em que algum dos b_i tem que ser diferente de zero. Suponhamos que $b_1 \neq 0$ (os outros casos são semelhantes).

Então podemos escrever $t = \dfrac{x - a_1}{b_1}$, e parametrizar a curva em função de x:

$$\begin{cases} y = a_2 + m_1(x - a_1) \\ z = a_3 + m_2(x - a_2) \end{cases}$$

onde $m_1 = \dfrac{b_2}{b_1}$ e $m_2 = \dfrac{b_3}{b_1}$.

Então se $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos da recta, temos que

$$y_1 - y_2 = m_1(x_1 - x_2)$$

$$z_1 - z_2 = m_2(x_1 - x_2)$$

pelo que a distância entre P e Q pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} d_P(P, Q) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \\ &= |x_1 - x_2| + |m_1(x_1 - x_2)| + |m_2(x_1 - x_2)| \\ &= |x_1 - x_2|(1 + |m_1| + |m_2|) \end{aligned}$$

Isto sugere que se tome para sistema de coordenadas da recta a função

$$f(x, y, z) = x(1 + |m_1| + |m_2|)$$

E de facto verificamos que para P e Q pontos da recta,

$$|fP - fQ| = |(x_1 - x_2)(1 + |m_1| + |m_2|)| = |x_1 - x_2|(1 + |m_1| + |m_2|) = d_M(P, Q)$$

pelo que f é um sistema de coordenadas da recta.

Vamos agora obter a esfera Pombalina de raio r e centro $O = (0, 0, 0)$. Trata-se do conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ que verificam $d_P(P, O) = r$, ou seja

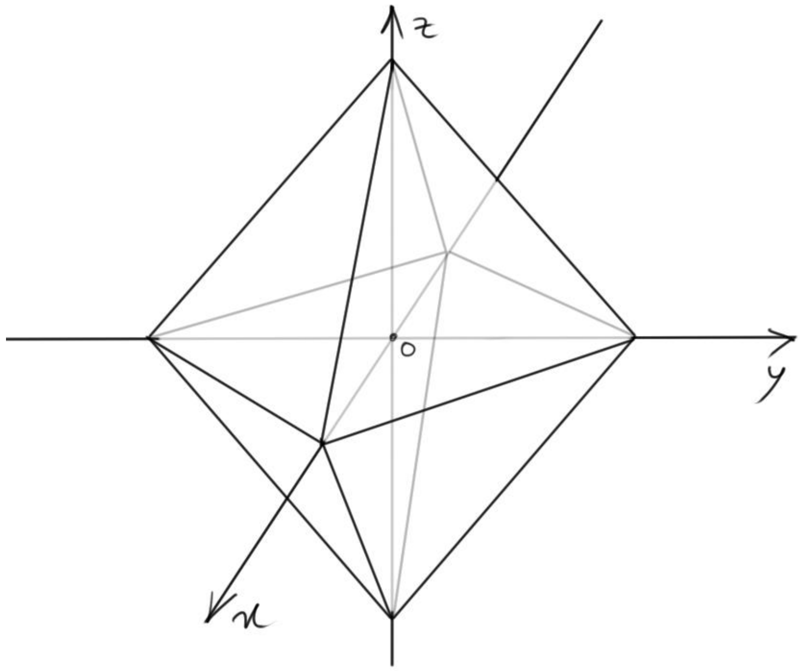
$$|x| + |y| + |z| = r$$

A forma mais fácil de lidar com isto é partir o espaço em octantes separados pelos planos coordenados. Por exemplo, para o octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ obtemos a condição

$$x + y + z = r$$

pelo que a intersecção da esfera com este octante é uma secção triangular de um plano, que toca os planos $x = 0, y = 0, z = 0$ nas rectas $y + z = r$, $x + z = r$, $x + y = r$ respectivamente, e que toca a esfera euclideana nos pontos $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Repetindo a mesma análise em todos os oito octantes (exercício) verificamos que a esfera Pombalina é a superfície de um octaedro, constituído de oito superfícies planas (triângulos equiláteros), que intersecta a esfera cartesiana em seis pontos, e que intersecta os planos $x = 0, y = 0, z = 0$ em circunferências Pombalinas (que como já vimos noutro exercício, são quadrados cartesianos).



FIM