Sucessões

15 de Dezembro de 2010

1 Sucessões

Chamamos **sucessão de números reais** a uma sequência *ordenada* e *infinita* de números reais.

Exemplo 1 *A sequência de todos os números naturais, enunciados por ordem crescente, é uma sucessão. É a sucessão* $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

Exemplo 2 *A sequência de todos os números pares, enunciados por ordem crescente. É a sucessão* $2, 4, 6, 8, \ldots$

Exemplo 3 *A sequência de todos os números ímpares, enunciados por ordem crescente. É a sucessão* $1, 3, 5, 7, \ldots$

1.1 Termo geral de uma sucessão

Uma forma de explícitar uma sucessão é dar o seu *termo geral*, isto é, uma fórmula que diz qual é o valor de u_n para todo o n.
Por exemplo, posso escrever *considere a sucessão de termo geral* $u_n = 2n$. Então, substituindo valores $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ na expressão u_n obtenho

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 2 \times 1 = 2\\
&u_2 = 2 \times 2 = 4\\
&u_3 = 2 \times 3 = 6\\
&u_4 = 2 \times 4 = 8\\
&u_5 = 2 \times 5 = 10\\
&.\\
&.\\
&.
\end{aligned}
$$

Ou seja, obtenho a sucessão dos números pares, e desta vez de maneira nada ambígua, pois se alguém me perguntar qual é o décimo-quinto termo da sucessão eu só tenho que substituir $n = 15$ em $u_n = 2n$ para saber que $u_{15} = 2 \times 15 = 30$.

Da mesma forma, se eu disser *considere a sucessão de termo geral* $u_n = 2n - 1$. Então, substituindo valores $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ na expressão u_n obtenho

$$
\begin{aligned}
&u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \\
&u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3 \\
&u_3 = 2 \times 3 - 1 = 5 \\
&u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7 \\
&u_5 = 2 \times 5 - 1 = 9 \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
$$

Exercicio 4 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 5n$.

Exercicio 5 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 2n + 2$.

Exercicio 6 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 2n + 3$.

Exercicio 7 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 5n + 4$.

Exercicio 8 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 2^n$.

Exercicio 9 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 3 \cdot 2^n$.

Exercicio 10 *Calcule os primeiros* 5 *termos da sucessão de termo geral* $u_n = 3 \cdot (-2)^n$.

1.2 Definição de sucessão por recorrência

Além de dar o termo geral, outra forma de explicitar uma sucessão é dizer como cada termo se relaciona com o seguinte. Diz-se então que estamos a definir a sucessão por *recorrência*.

Por exemplo, se eu disser que $u_{n+1} = u_n + 5$, estou a dizer que, dado um termo u_n, o termo seguinte, u_{n+1}, obtém-se de u_n somando-lhe 5. Isto só por si não nos diz qual é a sucessão, mas se eu além disso disser que o primeiro termo é $u_1 = 1$ então sei que $u_2 = u_1 + 5 = 1 + 5 = 6$. Mas então, como sei $u_2 = 6$, sei também u_3, pois $u_3 = u_2 + 5 = 6 + 5 = 11$, e assim sucessivamente.

Exercicio 11

1. *Suponha que* $u_{n+1} = u_n + 2$, *com* $u_1 = 0$. *Diga que sucessão obtém?*
2. *Descreva os primeiros 5 termos da seguinte sucessão definida por recorrência:* $u_1 = -3$, $u_n = 1 + (-1)^n u_{n-1}$ *(para* $n > 1$*).*
3. *Descreva os primeiros 5 termos da seguinte sucessão definida por recorrência:* $u_1 = 2$, $u_n = (u_{n-1})^{u_{n-1}}$ *(para* $n > 1$*).*
4. *Sebendo que* $u_n = u_{n-1} + 2$ *(para* $n > 1$*) e* $u_2 = 4$, *determine* u_1.
5. *Sebendo que* $u_n = u_{n-1}^2$ *(para* $n > 1$*) e* $u_3 = 81$, *determine* u_1.

1.3 Progressões Aritméticas

Dizemos que uma sucessão u_n é uma *progressão aritmética* se existe um número real d tal que para todo o $n > 0$ temos

$$u_{n+1} - u_n = d.$$

Chama-se a d a *razão* da progressão aritmética.

As progressões aritméticas ficam totalmente determinadas por u_1 e pela razão d. De facto,

$$\begin{aligned}
&u_2 = u_1 + d\\
&u_3 = u_2 + d = u_1 + 2d\\
&u_4 = u_3 + d = u_1 + 3d\\
&.\\
&.\\
&.\\
&u_n = u_1 + (n-1)d.
\end{aligned}$$

Está visto que o termo geral de uma sucessão aritmética é

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Exemplo 12 *Considere* $3, 5, 7, 9, \cdots$. *Trata-se da sucessão dos números ímpares maiores ou iguais que* 3. *A diferença entre dois números ímpares sucessivos é sempre igual a* 2. *Então podemos dizer que esta é uma progressão aritmética de razão* $d = 2$. *Vemos ainda que o primeiro termo é* $u_1 = 3$. *Logo o termo geral será*

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1).$$

Curiosidade

De onde vem o nome *progressão aritmética*?

Sejam a, b, c três elementos sucessivos da sucessão. Então $c - b = d$ e $b - a = d$, portanto $c - b = b - a$ e assim $2b = c + a$. Consequentemente,

$$b = \frac{a+c}{2},$$

ou seja, cada termo da sucessão é a *média aritmética* dos dois adjacentes.

Exercicio 13 *Determine o termo geral das seguintes progressões aritméticas.*

1. $1, 4, 7, 10, \ldots$ *(comece por determinar* u_1 *e* d*, e aplique a fórmula);*

2. $u_1 = -20$, $d = 6$ *(basta aplicar a fórmula);*

3. $u_1 = 30$, $u_2 = 41$.

4. $u_3 = 10$, $u_5 = 20$ *(recorde que numa progressão aritmética cada termo é a média aritmética dos dois adjacentes).*

Exercicio 14 *Considere a sucessão* $3, 12, 21, 30, \ldots$. *Prove que é uma progressão aritmética e diga qual é a razão, o primeiro termo, e o termo geral. Diga se os inteiros 234 e 453 são elementos da sucessão.*

Exercicio 15 *Considere a sucessão* $12, 12.5, 13, 13.5, \ldots$. *Prove que é uma progressão aritmética e diga qual é a razão e o termo geral. Diga se os números* 234.25 *e* 453.5 *são elementos da sucessão.*

Exercicio 16 *Considere a sucessão* $29, 42, 55, \ldots$. *Prove que é uma progressão aritmética e diga qual é a razão e o termo geral. Qual é o primeiro termo maior que 10000?*

Exercicio 17 *Considere a sucessão* $0, 5, 7.5, 10, \ldots$. *Inclua um novo termo de forma a que passemos a ter uma progressão aritmética.*

1.4 Termo geral por ordem inversa

Sabemos que uma progressão aritmética é da forma $u_n = u_1 + (n-1)d$. Como chegámos a esta conclusão? Nós sabemos que cada termo de uma progressão aritmética é dado pelo anterior mais a razão, ou seja, $u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_2 + d$, etc. Daqui resulta, como já vimos acima, $u_3 = u_2 + d = (u_1 + d) + d = u_1 + 2d$. Repetindo o mesmo argumento chegamos a $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vamos supor agora que nos era dada a razão d da progressão e um termo arbitrário u_l. Como poderíamos chegar ao primeiro termo e ao termo geral? Sabemos que $u_{l-1} = u_l - d$; da mesma forma $u_{l-2} = u_{l-1} - d = (u_l - d) - d = u_l - 2d$. Repetindo o mesmo argumento concluímos que

$$u_{l-n} = u_l - nd \quad (0 \leq n < l).$$

Assim, $u_1 = u_{l-(l-1)} = u_l - (l-1)d$.

Exemplo 18 *Considere a progressão aritmética cuja razão é* 3 *e tal que* $u_{10} = 42$. *Determine* u_1.

R *Pela fórmula acima,*

$$u_{10-n} = u_{10} - nd.$$

Logo

$$u_1 = u_{10-9} = u_{10} - 9 \times d = u_{10} - 9 \times 3 = 42 - 27 = 15.$$

O termo geral será $u_n = 15 + 3(n-1)$.

Exercicio 19 *Determine os primeiros 5 termos das seguintes progressões aritméticas:*

1. u_n *tal que* $d = 2$ *e* $u_{20} = 61$.

2. u_n *tal que* $d = 5$ *e* $u_{10} = 10$.

3. u_n *tal que* $d = 4$ *e* $u_{15} = -3$.

1.5 Soma dos termos de uma progressão aritmética

Seja u_n uma progressão aritmética de razão d. Suponhamos que queríamos calcular a soma dos primeiros n termos da progressão, ou seja, queríamos calcular

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Para começar, imaginemos que a nossa sucessão tem apenas três termos e é: u_1, $u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$. A mesma sucessão escrita em termos do último termo (u_3) será: $u_1 = u_3 - 2d$, $u_2 = u_3 - d$ e u_3.

Portanto a soma dos termos desta sucessão é

$$S_3 = u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d)$$

e é também

$$S_3 = (u_3 - 2d) + (u_3 - d) + u_3.$$

Somando os dois membros destas identidades temos

$$S_3 + S_3 = u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + (u_3 - 2d) + (u_3 - d) + u_3 = 3u_1 + 3u_3 = 3 \times (u_1 + u_3) \Rightarrow 2S_3 = 3(u_1 + u_3).$$

Daqui resulta

$$S_3 = \frac{3(u_1 + u_3)}{2}.$$

Vamos supor agora que temos uma progressão aritmética geral com n termos: $u_1, \ldots, u_n$. E queremos calcular a soma destes n termos:

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n = ?$$

Vamos fazer exatamente o mesmo que fizemos acima. Por um lado sabemos que

$$S_n = u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) + \cdots + (u_1 + (n-2)d) + (u_1 + (n-1)d).$$

Por outro lado, excrevendo os termos não em função do primeiro termo, mas do último, sabemos que

$$S_n = (u_n - (n-1)d) + (u_n - (n-2)d) + \cdots + (u_n - 2d) + (u_n - d) + u_n.$$

Se somarmos ambos os lados destas equações verificamos que todos os termos em d se anulam, e fica apenas

$$2S_n = n(u_1 + u_n).$$

Portanto descobrimos a seguinte fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(u_1 + u_n\right).$$

Tendo em conta que $u_n = u_1 + (n-1)d$, podemos ainda escrever a fórmula alternativa

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

Exemplo 20 *Calcule a soma* $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. *trata-se dos 100 primeiros termos da progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 e o centésimo é 100. Então*

$$1 + \ldots + 100 = S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50 \times 101 = 5050.$$

Exemplo 21 *Calcule a soma dos pares menores que 999. Já sabemos que o primeiro par menor que 999 é 2; e o maior par menor que 999 é 998. Portanto,*

$$2 + \ldots + 998 = \frac{n}{2}(2 + 998) = ?$$

Para terminarmos o cálculo, apenas é necessário saber n, *o número do termo de valor 998 na progressão. Se*

$$u_1 = 2$$

e $u_n = 998$, *e temos* $d = 2$, *como podemos determinar* n*? Usando o termo geral da sucessão. Sabemos que a nossa sucessão é dada por* $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1)$. *Logo,* $998 = 2 + 2(n-1)$ *e assim* $998 - 2 = 2(n-1)$, *ou seja,* $n = 1 + 996/2 = 499$.

Agora já podemos substituir lá em cima:

$$2 + \ldots + 998 = \frac{n}{2}(2 + 998) = \frac{499}{2}1000 = 499 \times 500 = 249500$$

.

Exemplo 22 *Calcule a soma dos múltiplos de 5 maiores que 999 e menores que 2001.*

Já sabemos que o primeiro múltiplo de 5 maior que 999 é 1000; e o maior múltiplo de 5 menor que 2001 é 2000. Portanto,

$$1000 + \ldots + 2000 = \frac{n}{2}(1000 + 2000) =?$$

Para terminarmos o cálculo, apenas é necessário saber n*, o número de termo do valor 2000 na progressão. Sabemos que a nossa sucessão é dada por* $u_n = 1000+(n-1)5$*. Logo,* $2000 = 1000 + 5(n-1)$ *e assim* $2000 - 1000 = 5(n-1)$*, ou seja,* $n = 1 + 200 = 201$.

Agora já podemos substituir lá em cima:

$$1000 + \ldots + 2000 = \frac{n}{2}(3000) = \frac{201}{2}3000 = 201 \times 1500 = 301500$$

.

Exercicio 23 *Calcule* $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 50$.

Exercicio 24 *Calcule a soma dos primeiros 20 termos da progressão* $100, 93, 86, 79, \ldots$.

Exercicio 25 *Calcule a soma da sequência de todos os anos da nossa Era:* $1 + 2 + \ldots + 2010$.

1.6 Progressões Geométricas

Dizemos que uma sucessão u_n é uma *progressão geométrica* se existe um número r tal que para todo o n temos

$$u_{n+1}/u_n = r.$$

Chama-se a r a *razão* da progressão geométrica.

Quando sabemos o termo inicial u_1 e a razão r, é fácil calcular o termo geral u_n. Basta notar que

$$\begin{aligned}
&u_2 = u_1 r \\
&u_3 = u_2 r = u_1 r^2 \\
&u_4 = u_3 r = u_1 r^3 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&u_n = u_1 r^{n-1}.
\end{aligned}$$

De onde vem o nome *geométrico*? Sejam a, b, c três elementos sucessivos da sucessão. Então $c/b = r$ e $b/a = r$, portanto $c/b = b/a$ e assim $b^2 = ac$. Consequentemente,

$$b = \pm\sqrt{ac},$$

ou seja, cada termo da sucessão é a *média geométrica* dos dois adjacentes.

Exemplo 26 *Considere a seguinte sequência:* $8, 4, 2, 1, 1/2, \cdots$.

Repare-se que $4/8 = 1/2$, $2/4 = 1/2$, $1/2 = 1/2$ *(!)*, $(1/2)/1 = 1/2$. *O quociente entre cada termo e o termo anterior é sempre igual a* $1/2$*, sendo portanto que a sucessão é uma progressão geométrica de razão* $r = 4/8 = 2/4 = 1/2$. *O termo inicial é* $u_1 = 8$*, portanto o termo geral virá dado por*

$$u_n = 8(1/2)^{n-1}.$$

Exercicio 27 *Sabendo que as seguintes sucessões são progressões geométricas determine os números* b *e* c*:*

a) $2, 8, b, c, \ldots$

b) $20, 10, b, c, \ldots$

c) $50, -25, b, c, \ldots$

Exercicio 28 *Prove que* $8, 24, 72, \ldots$ *é progressão geométrica. Encontre o termo geral.*

Exercicio 29 *Prove que* $8, -6, 4.5, -3.375, \ldots$ *é progressão geométrica. Encontre o termo geral.*

Exercicio 30 *Diga se* $8, 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, \ldots$ *é progressão geométrica. Em caso afirmativo, encontre o termo geral.*

Exercicio 31 *Sabendo que* $k-1, 2k, 21-k$ *são termos de uma progressão geométrica, encontre* k.

Exemplo 32 *Suponha que* u_n *é uma progressão geométrica e que* $u_2 = 10$, $u_5 = -80$. *Diga qual é o termo geral de* u_n.
Solução: Como é dito que u_n *é progressão geométrica então sabemos que o termo geral é* $u_n = u_1 r^{n-1}$. *Queremos portanto saber quais são os valores de* u_1 *e de* r. *Como* $u_2 = 10$ *e* $u_2 = u_1 r$, *temos* $u_1 r = 10$ *e portanto* $u_1 = 10/r$. *Como* $u_5 = -80$ *e* $u_5 = u_1 r^4$, *temos que* $u_1 r^4 = -80$. *Substituindo nesta expressão* $u_1 = 10/r$ *obtemos que* $10r^3 = -80$, *portanto* $r^3 = -8$, *e* $r = -2$. *Então* $u_1 = 10/r = -5$. *Consequentemente o termo geral da progressão é*

$$u_n = -5 \times (-2)^{n-1}$$

Exercicio 33 *Suponha que* u_n *é uma progressão geométrica e que* $u_4 = 24$, $u_7 = 192$. *Diga qual é o termo geral de* u_n.

Exercicio 34 *Suponha que* u_n *é uma progressão geométrica e que* $u_3 = 5$, $u_7 = 5/4$. *Diga qual é o termo geral de* u_n.

Exemplo 35 *Encontre o primeiro termo de* $6, 6\sqrt{2}, 12, 12\sqrt{2}, \ldots$ *que é maior que* 210.

Solução: Notamos que a sucessão dada é uma progressão geométrica com $u_1 = 6$ e razão $r = \sqrt{2}$. Então o termo geral é

$$u_n = 6 \times \sqrt{2}^{n-1}.$$

Queremos encontrar o menor n tal que $u_n = 6 \times \sqrt{2}^{n-1} > 210$, ou seja, $\sqrt{2}^{n-1} > 210/6 = 35$. Tirando logaritmos de ambos os lados da desigualdade, isto equivale a

$$\begin{aligned} & log\left((\sqrt{2})^{n-1}\right) > log(35) \Leftrightarrow (n-1)log(\sqrt{2}) > log(35) \\ \Leftrightarrow \quad & n - 1 > \frac{log(35)}{log(\sqrt{2})} \Leftrightarrow n > 1 + \frac{log(35)}{log(\sqrt{2})} \\ \Leftrightarrow \quad & n > 1 + \frac{log(35)}{log(2^{1/2})} \Leftrightarrow n > 1 + 2\frac{log(35)}{log(2)} \\ \Leftrightarrow \quad & n > 11,25857 \end{aligned}$$

Então o menor u_n maior que 210 é u_{12}. De facto, verificamos que $u_{11} = 6 \times \sqrt{2}^{10} = 192$, e $u_{12} = 6 \times \sqrt{2}^{11} = 271.529 > 210$.

Exercicio 36 *Encontre o primeiro termo de* $4, 4\sqrt{3}, 12, 12\sqrt{3}, \ldots$ *que é maior ou igual que* 580.

Exercicio 37 *Encontre o primeiro termo de* $12, 6, 3, 1.5, \ldots$ *que é menor ou igual que* 10^{-3}.

Exemplo 38 *As ilhas Comores começaram por ter* 50 *coelhos. A população cresceu 7 por cento por mês.*
a) Quantos coelhos existiam nas Comores ao fim de 10 meses?
b) Quantos coelhos existiam nas Comores ao fim de 3 anos?
c) Quanto tempo demorou a ultrapassar os 100 coelhos? e 200 coelhos?

Solução: É-nos dito que a população de coelhos começa com 50 coelhos e cresce 7 por cento ao mês. Quer dizer que no início do segundo mês temos 50 coelhos mais 0.07×50 coelhos, ou seja $(1 + 0.07) \times 50 = 1.07 \times 50$ coelhos. Em geral, se chamarmos u_n ao número de coelhos no início do n-ésimo mês, então quer dizer que $u_{n+1} = u_n * 1.07$ para todo o n, ou seja, a sucessão u_n é uma progressão geométrica de razão $r = 1.07$. Como o primeiro termo é $u_1 = 50$, o termo geral é $u_n = 50 \times (1.07^{n-1})$. Basta agora aplicar o que já aprendemos:
a) Ao fim de 10 meses (ou seja, no início do décimo-primeiro mês), existem $u_{11} = 50 \times (1.07)^{10} = 98$ coelhos (e, para ser exacto, mais 0.35757 de um coelho).
b) Ao fim de três anos, que são $3 \times 12 = 36$ meses, temos $u_{37} = 50 \times (1.07)^{36} = 571$ coelhos (e mais aproximadamente 20 por cento de um coelho).
c) Já vimos na alínea a) que $u_{11} \approx 98$. Portanto $u_{12} \approx 104$ coelhos, ou seja, a população dobrou ao fim de 11 meses. Queremos saber agora quanto tempo demorou para chegar aos 200 coelhos. Uma forma geral de o fazer seria usar o método do exemplo (35), mas existe outra forma de chegar perto da resposta rapidamente. As progressões geométricas têm a propriedade de dobrar o valor a intervalos "de tempo"constantes. Isto é, se u_{k+1} é o dobro de u_1 então u_{s+k} é o dobro de u_s para qualquer s (ou seja, o número de coelhos dobra sempre que passam k unidades de tempo). De facto, $u_{k+s} = u_1 r^{k+s-1} = u_1 r^k r^{s-1} = u_{k+1} r^{s-1} = 2u_1 r^{s-1} = 2u_s$. Então, como já tínhamos visto que $u_{12} = u_{1+11}$ é (um pouco mais do que) o dobro de u_1, é de esperar que u_{12+11} seja um pouco mais do que o dobro de u_{12}. De facto, $u_{23} \approx 221$ acaba por ser um pouco alto de mais, mas está perto da resposta certa (o erro decorre de que nenhum dos u_n é exactamente o dobro de u_1), que é $u_{22} \approx 207$.

Exercicio 39 *Um formigueiro tem 500 formigas. O número de formigas cresce 12 por cento por semana.*

a) Quantas formigas há ao fim de 5 semanas?

b) Quantas formigas há ao fim de 30 semanas?

Exercicio 40 *Há 1300 tigres na Índia. Se todos os anos a população decrescer aproximadamente de 5 por cento, quantos anos levará até à extinção dos tigres na Índia?*

1.7 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Seja u_n uma progressão geométrica de razão r. Suponhamos que queríamos calcular a soma dos primeiros n termos da progressão, ou seja, queríamos calcular

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 r^0 + u_1 r^1 + \ldots + u_1 r^{n-1} \\ &= (1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) u_1 \end{aligned}$$

Multiplicando esta expressão por $(1 - r)$ obtemos

$$\begin{aligned} (1-r)S_n &= (1-r)(1 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1})u_1 \\ &= \big[1 + r^1 + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} \\ &\qquad - r^1 - r^2 - r^3 - \cdots - r^{n-1} - r^n\big]u_1 \\ &= (1 - r^n)u_1 \end{aligned}$$

Portanto

$$S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$$

(supondo $r \neq 1$; se $r = 1$ é claro que $S_n = n \cdot u_1$).

Exemplo 41 *Calcule a soma dos primeiros 20 termos da sequência* $2, 6, 18, 54, \ldots$.

Solução: Trata-se de somar os primeiros 20 termos da progressão geométrica com $u_1 = 2$ e $r = 3$. Então

$$S_n = \frac{2(1-3^{20})}{1-3} = 3486784400.$$

Exercicio 42 *Calcule a soma dos primeiros 10 termos da sequência*

$$1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ldots$$

.

Exercicio 43 *Determine o número de termos da sequência*

$$24, 12, 6, \ldots, 0.75.$$

Exercicio 44 *Determine o termo geral da progressão geométrica que tem os termos* $u_6 = 16/3$, $u_{10} = 256/3$.

Exercicio 45 *António ganha 20000 Euros este ano e o salário aumenta 1,5 por cento ao ano.*
a) Diga quanto ganhará o António em 2015?
b) Diga quando chegará a ganhar mais de 80000 Euros ao ano?