Orientação de trabalho:

• Inicie o estudo do Tema 3: **Recorrências**

Secção 3.1: *Relações de recorrência* - (pág 139 a 164.)

Nesta secção irá tomar contacto com o conceito de relação de recorrência. Para isso leia com atenção os exemplos 1 a 5 desta secção, com excepção do exemplo 4.

Muitos algoritmos são baseados em relações de recorrência e problemas combinatórios considerados à primeira vista difíceis podem ser resolvidos mais facilmente se escritos na forma de relações de recorrência.

A noção de recursão em matemática surge naturalmente em várias questões. Por exemplo no definição de factorial:

$$0! = 1;$$
$$n! = n(n-1)! \quad \text{se } n \geq 1$$

Outro exemplo é o da definição de número harmónico:

$$H_1 = 1;$$
$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} \quad \text{se } n \geq 2$$

De grosso modo, uma relação de recorrência, para uma sucessão $a_0, a_1, a_2, ...$, é definida por um conjunto de igualdades contendo alguns valores iniciais para os primeiros termos $a_0, a_1, ..., a_k$ e uma final para indicar o termo geral em função dos termos anteriores. Isto significa que se quisermos saber o n-ésimo termo de uma sucessão dada por uma relação de recorrência, temos de calcular alguns termos anteriores, o que pode ser pouco prático. O objectivo é, pois, obtermos uma forma fechada para a relação de recorrência, ou seja uma solução que não dependa dos termos anteriores e somente de n. Neste tema iremos estudar alguns métodos para resolver relações de recorrência.

Relação de recorrência:

Dada uma sucessão $a_0, a_1, a_2, ...$ uma relação de recorrência ou recursiva, para a sucessão dada, é uma fórmula que relaciona cada termo a_n com os termos que o precedem $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$:

$$a_n = f(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}), \quad n \geq k+1.$$

As condições iniciais para a relação de recorrência especificam os valores dos termos $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ para um índice k fixo.

O primeiro método que estudamos para resolver uma recorrência é o método de diante para trás:

Método de diante para trás:

Suponhamos que temos uma fórmula de recorrência

$$a_n = f(a_0, a_1, ..., a_{n-1}), \quad n \geq k+1 \qquad (*)$$

e que está sujeita a k condições iniciais. Na igualdade (*) substituímos a_{n-1} por uma expressão do tipo (*) e depois a_{n-2} e assim sucessivamente até ao termo a_0, de modo a desaparecerem os termos da sucessão. Este método pressupõe alguma advinhação da forma geral. Assim a fórmula obtida deverá ser provada pelo método de indução matemática.

Leia com cuidado os exemplos 1 e 2 de aplicação.

Folha 8: EXERCÍCIOS (pág. 161 e 162 do manual)

Relações de recorrência (secção 3.1)

1. Utilize o método de substituição de diante para trás para encontrar a solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

que satisfaz a condição inicial $x_0 = 1$. Confirme o seu resultado por indução matemática.

2. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ que é definida por $a_0 = 0$ e é solução da fórmula de recorrência

$$x_n = 2x_{n-1} + n, \quad n \geq 1.$$

Mostre que $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i)$ para todo o número natural n. Calcule esta soma.

3. Encontre a solução da seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &x_1 = 3, \\ &x_n = x_{n-1} + 3n^2, \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

4. Considere a sucessão $\langle d_n \rangle$ definida por $d_0 = 1$ e por $d_n = nd_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

(a) Mostre, por indução, que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(b) Obtenha a igualdade acima pelo método da substituição de diante para trás.

5. Considere a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} &x_0 = 1, \\ &x_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Calcule os primeiros termos desta sucessão e conjecture uma fórmula explícita para x_n.

(b) Verifique, por indução matemática, que a fórmula que conjecturou na alínea anterior está correcta.

6. Considere a sucessão dupla $\langle x_{n,k} \rangle_{n,k}$ definida por $x_{0,k} = 0$ e por

$$x_{n+1,k} = \begin{cases} x_{n,k} + 1, & \text{se } n \geq k, \\ 0, & \text{se } n < k. \end{cases}$$

Explicite esta sucessão: $x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, ..., x_{n,k}$.

7. Mostre que

$$F_{n+1} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k$$

para todo o número natural n.

[*Sugestão:* Proceda à expansão da fórmula $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1})$ e use o binómio de Newton.]

8. Mostre por indução que

$$F_{n+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k = 1 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

para todo o número natural $n \geq 1$.

9. Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 0$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1, \quad \text{para } n \geq 2.$$

(a) Mostre, por indução, que $C_{2^n} = n$.

(b) Mostre, por indução em n, que, se $2^n \leq k < 2^{n+1}$, então $C_k = n$.

(c) Usando o resultado da alínea anterior, demonstre que $C_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

10. Sabe-se que qualquer número natural não nulo se escreve de maneira única como soma de potências distintas de 2 (notação posicional binária). Dito de outro modo, dado $n \geq 1$, existe uma única sequência binária $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ com $b_k = 1$ (não há zeros à esquerda!) tal que

$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i = b_0 + b_1 2 + b_2 2^2 + \cdots + b_k 2^k.$$

Também se diz que a sequência $b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0$ é a EXPANSÃO BINÁRIA de n e escreve-se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$.

(a) Para aquecer, mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, onde $n > 1$, então $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = (b_k b_{k-1} \ldots b_2 b_1)_2$.

(b) Considere a sucessão $\langle C_n \rangle$ definida por $C_1 = 1$ e por

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Mostre que, se $n = (b_k b_{k-1} \ldots b_1 b_0)_2$, então

$$C_n = \sum_{i=0}^{k} b_i (2^{i+1} - 1).$$

11. O número máximo de comparações M_n que o algoritmo *Quicksort* efectua para ordenar uma lista de n itens satisfaz a relação de recorrência

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_n &= n + 1 + \max_{1 \leq k \leq n-1} (x_k + x_{n-k}), \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Mostre que $M_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - 3$, para todo o número natural $n \geq 1$.

Folha 8: Soluções

1. $x_n = 2^{n+1} - 1$ para todo $n \geq 0$.

2. $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i(n-i) = 2^{n+1} - n - 2$.

3. $x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

5. Os primeiros termos da sucessão são $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8, x_5 = 16$. Conjectura: $x_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\|n = 0\|$.

6. $x_{1,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leq 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$, $x_{2,k} = \begin{cases} 2 & \text{se } k \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$, $x_{3,k} = \begin{cases} 3 & \text{se } k \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < k \leq 2 \\ 0 & \text{se } k > 2 \end{cases}$. No caso geral, temos $x_{n,k} = \begin{cases} n & \text{se } k \leq 0 \\ n-1 & \text{se } 0 < k \leq 1 \\ \vdots & \\ 1 & \text{se } n-2 < k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } k > n-1 \end{cases}$.