ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Proposta de resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção da prova. Não se destina a estudo ou revisão. Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos.
Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nas submissões dos alunos.

I. Resolução: A resolução depende do valor de r'. Aqui apresentamos uma solução com $r' = 12$.

Temos $x - 6 \cdot 12 = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA) = 2 - 4 \cdot 12 - 12 - 2 = -5 \cdot 12$. Portanto $x = 12$.

II. Resolução: Seja λ um val.pr. de f com vetor próprio B. Então $\lambda B = f(B) = B^T - B \Rightarrow B^T = (1 + \lambda)B$. Temos

$$f(B^T) = (B^T)^T - B^T = B - (1 + \lambda)B = -\lambda B$$

e

$$f(B^T) = f((1 + \lambda)B) = (1 + \lambda)f(B) = (1 + \lambda)\lambda B = (\lambda^2 + \lambda)B$$

Porque B é um val.pr., $B \neq 0_{2\times2}$, portanto $-\lambda = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \lambda \in \{0, -2\}$.

Se $\lambda = 0$, temos $B^T = (1 + 0)B = B$. Por examplo, se $B = I_2$, então $f(I_2) = I_2 - I_2 = 0 = 0I_2$.

Se $\lambda = 0$, temos $B^T = (1 - 2)B = -B$. Por examplo, se $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $f(B) = B^T - B = -B - B = -2B$.

Portanto 0 e -2 são os valores próprios de f.

(Para uma solução alternativa, escolha uma base (simples) $\mathcal{B}$, calcule $M = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, e depois calcule os valores próprios da matriz M.)

III. Resolução:

A resolução efectiva depende do valor de r'. Aqui apresentamos uma solução com $r' = 5$.

Seja $\mathcal{B}' = (p_1, p_2, p_3)$. Temos

$$A = \mathcal{M}(T, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidos)

Portanto,

$$\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 5 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

IV. Resolução:

(A3) Temos $3 \oplus y = 3y - 2 \cdot 3 - 2y + 6 = y$

e $x \oplus 3 = 3x - 2x - 2 \cdot 3 + 6 = x$.

Portanto 3 é o elemento neutro de $\oplus$, e (A3) é valido.

(A4) Seja $x \in V$, então $x - 2 \neq 0$. Considere $x' = \frac{2x-3}{x-2} > \frac{2x-4}{x-2} = 2$. Portanto $x' \in V$.

Temos

$x \oplus x' = x\frac{2x-3}{x-2} - 2x - 2\frac{2x-3}{x-2} + 6 = \frac{2x^2-3x-2x^2+4x-4x+6+6x-12}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} = 3$

e

$x' \oplus x = \frac{2x-3}{x-2}x - 2\frac{2x-3}{x-2} - 2x + 6 = \frac{2x^2-3x-4x+6-2x^2+4x+6x-12}{x-2} = \frac{3x-6}{x-2} = 3$

Portanto x' é o inverso de x, e (A4) é valido.

(M2): Sejam $a, b \in \mathbb{R}, x \in V$. Temos

$a \otimes x \oplus b \otimes x = ((x-2)^a + 2) \oplus ((x-2)^b + 2)$

$= ((x-2)^a + 2)((x-2)^b + 2) - 2((x-2)^a + 2) - 2((x-2)^b + 2) + 6$

$= (x-2)^a(x-2)^b + 2(x-2)^a + 2(x-2)^b + 4 - 2(x-2)^a - 4 - 2(x-2)^b - 4 + 6$

$= (x-2)^{a+b} + 2 = (a+b) \otimes x$

Portanto, (M2) é valido.

FIM