Lógica e Teoria de Conjuntos | 21079

RESOLUÇÃO

Nome: ....

B. I.: .... **N^0 de Estudante:** ....

Curso: .... **Turma:** ....

Data: .... **Ano Lectivo:** 2017/18

Docentes: Gilda Ferreira e Patrícia Engrácia

1. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem cujos parâmetros a, b (símbolos de constantes), P, Q (símbolos de predicados 2-ários) e respetivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os estudantes na turma do João.
a: "João".
b: "Margarida".
$P(x, y)$: "x gosta de y".
$Q(x, y)$: "x é y".

(a) Indique as variáveis que ocorrem livres e as variáveis que ocorrem ligadas na seguinte fbf de $\mathcal{L}$: $P(x, z) \wedge \exists z \forall y (\neg Q(y, z) \vee P(z, a))$.
Resolução: A variável x ocorre livre e a variável y ocorre ligada (muda). A primeira ocorrência da variável z é livre as restantes ocorrências da variável z são ligadas.

(b) Traduza para a linguagem $\mathcal{L}$ as seguintes afirmações:

(i) A Margarida gosta de todos os estudantes na turma do João.
Resolução: $\forall x P(b, x)$

(ii) Há um estudante na turma do João que só gosta de si próprio.
Resolução: $\exists x (P(x, x) \wedge \forall y (P(x, y) \Rightarrow Q(y, x)))$

(c) Traduza para linguagem corrente (o mais simples possível) a seguinte fbf de $\mathcal{L}$:

$P(a,a) \wedge \exists x(\neg Q(x,a) \wedge P(a,x) \wedge \forall z(P(a,z) \Rightarrow Q(z,x) \vee Q(z,a)))$.

Resolução: Em toda a turma, o João só gosta de exatamente duas pessoas: de si próprio e de um seu colega.

2. Escreva, em português corrente, a negação de cada uma das seguintes asserções sem usar a formulação inicial “Não é verdade que ...”.

(a) Nenhuma das bolas na caixa é branca.

Resolução: Existe pelo menos uma bola na caixa que é branca.

(b) Existe pelo menos uma bola (na caixa) que não é branca.

Resolução: Todas as bolas (na caixa) são brancas.

(c) Alguma bola na caixa é branca.

Resolução: Nenhuma bola na caixa é branca.

(d) Nem todas as bolas na caixa são brancas.

Resolução: Todas as bolas na caixa são brancas.

3. Seja $\mathcal{M}$ um modelo cujo domínio é $\mathbb{Z}$ (o conjunto dos números inteiros) e cujas interpretações dos símbolos 0,1, +, $\cdot$, $=$ são as usuais. Indique para que instanciações de y a seguinte fbf é verdadeira.

$$\exists z\,((1+1)\cdot z = y) \Rightarrow \forall x \exists z\,((1+1)\cdot z + 1 = x \cdot y)$$

Resolução: Note que a fórmula exprime que

$\exists z\,(2z = y) \Rightarrow \forall x \exists z\,(2z + 1 = xy)$,

ou seja “Se y é um número inteiro par então qualquer que seja o número inteiro x temos que xy é ímpar”.

Se y for um número inteiro ímpar a fórmula anterior é verdadeira pois trata-se de uma implicação com antecedente falso. Se y for um número inteiro par temos uma implicação com antecedente verdadeiro e consequente falso (note que qualquer x serve de contraexemplo pois sendo y par xy também é par). Logo a implicação é falsa.

Assim sendo, as instanciações de y que tornam a fórmula verdadeira são instanciações com números ímpares.

4. Demonstre, em dedução natural, que

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \neg \forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)).$$

Resolução:

$-$	1.	$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$	$Hip.$
$\{2, v\}$	2.	$P(v) \wedge Q(v)$	$Hip.[\exists E]$
$\{2, v\}$	3.	$P(v)$	$2[\wedge E1]$
$\{2, v\}$	4.	$Q(v)$	$2[\wedge E2]$
$\{2, v, 5\}$	5.	$\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$	$Hip.[\neg I]$
$\{2, v, 5\}$	6.	$P(v) \Rightarrow \neg Q(v)$	$5[\forall E]$
$\{2, v, 5\}$	7.	$\neg Q(v)$	$3, 6[\Rightarrow E]$
$\{2, v, 5\}$	8.	$\perp$	$4, 7[\neg E]$
$\{2, v\}$	9.	$\neg\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$	$5 - 8[\neg I]$
$-$	10.	$\neg\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$	$1, 2 - 9[\exists E]$

FIM