Processos Estocásticos Aplicados | 21089

Período de Realização

Decorre de 13 a 20 de dezembro de 2019

Data de Limite de Entrega

20 de dezembro de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Processos de Contagem e Cadeias de Markov a Tempo Discreto

Trabalho a desenvolver

Resolução dos três grupos de exercícios constantes no enunciado.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 10 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira

Enunciado

1. Sejam $\{N(t) : t \geq 0\}$ um processo de contagem de incrementos independentes e estacionários e $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ a sucessão de tempos de espera correspondente. Supondo que, para cada n, τ_n tem uma distribuição gama de parâmetros n e ν, prove que o processo $\{N(t) : t \geq 0\}$ é de Poisson com intensidade ν.

2. Seja $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados o conjunto $\mathbb{N}$. Justificando **detalhadamente** cada resposta, mostre que:

2.1. $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, 0 \leq m_1 < \ldots < m_n, \forall\, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$,

$$P[X_{m_1} = k_1, \ldots, X_{m_n} = k_n] = P[X_{m_1} = k_1] \prod_{i=1}^{n-1} P[X_{m_{i+1}} = k_{i+1} \,|\, X_{m_i} = k_i].$$

2.2. $\forall\, 0 \leq m < u < n, \forall\, i, j \in \mathbb{N}$,

$$P[X_n = i \,|\, X_m = j] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X_u = k \,|\, X_m = j] P[X_n = i \,|\, X_u = k].$$

3. No espaço de estados $\mathbb{Z}$ considere uma sucessão $\{X_m : m \in \mathbb{N}\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tal que

$$P[X_1 = 1] = p \quad \text{e} \quad P[X_1 = -1] = q = 1 - p.$$

Considere a cadeia de Markov $\{S_n : n \in \mathbb{N}_0\}$,

$$S_0 = k, \quad S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m,$$

que representa um passeio aleatório com início no valor $k \in \mathbb{Z}$.

3.1. Mostre que a cadeia de Markov é homogénea e de probabilidades de transição a um passo

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{se } j = i + 1 \\ q, & \text{se } j = i - 1 \\ 0, & \text{se } j \neq i + 1 \text{ e } j \neq i - 1 \end{cases}$$

3.2. Por recurso ao método de indução matemática prove que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e para qualquer estado $j \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$P[S_n = j \,|\, S_0 = k] = \binom{n}{\frac{n+j-k}{2}} p^{\frac{n+j-k}{2}} q^{\frac{n-j+k}{2}}$$

se $n+j-k$ é um número inteiro não negativo par, caso contrário,

$$P[S_n = j \mid S_0 = k] = 0.$$

[*Recorde que para* $m < 0$ *ou para* $m > n$, $\binom{n}{m} := 0$.]

3.3. Supondo $p \neq q$, mostre que

$$\lim_n P[S_n = k \mid S_0 = k] = 0.$$

FIM