UNIDADE CURRICULAR: ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

CÓDIGO: 21037

DOCENTE: Catarina Nunes
TUTORA: Ana Leitão Ferreira

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. - 0.5 valores

X - v.a diferença entre o número de caras e o número de coroas obtidas após lançar uma moeda equilibrada n vezes. (X= nº caras - nº coroas)
Este é o domínio da variável aleatória X:

$$X(i) = n - 2i, \quad i = 0, \ldots, n$$

(100% cotação)

2.

2.1 - 0.5 valores

Seja $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$: função de probabilidade conjunta das v.a. X e Y. *(10% cotação)*

$$p(0,0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = 10/220$$

$$p(0,1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = 40/220$$

$$p(0,2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = 30/220$$

$$p(0,3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = 4/220$$

$$p(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = 30/220$$

$$p(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = 60/220$$

$$p(1,2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = 18/220$$

$$p(2,0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = 15/220$$

$$p(2,1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = 12/220$$

$$p(3,0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = 1/220$$

(70% cotação)

$p_{X,Y}(x,y)$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=0$	10/220	40/220	30/220	4/220
$X=1$	30/220	60/220	18/220	0
$X=2$	15/220	12/220	0	0
$X=3$	1/220	0	0	0

(20% cotação)

2.2 - 0.5 valores

Seja $p_X(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. X.

$$\forall x \ : \ p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

e $p_Y(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. Y.

$$\forall y \ : \ p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

(50% cotação)

A tabela seguinte apresenta as funções de probabilidades marginais:

$p_{X,Y}(x,y)$	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$p_X(x)$
$X=0$	10/220	40/220	30/220	4/220	84/220
$X=1$	30/220	60/220	18/220	0	108/220
$X=2$	15/220	12/220	0	0	27/220
$X=3$	1/220	0	0	0	1/220
$p_Y(y)$	56/220	112/220	48/220	4/220	

(50% cotação)

2.3 - 0.5 valores

$$E(X) = \sum_x p_X(x) =$$

(30% cotação)

$$= 0 \times 84/220 + 1 \times 108/220 + 2 \times 27/220 + 3 \times 1/220 = 165/220 = 0.75$$

(70% cotação)

3. - 0.5 valores

Seja X - v.a. o número de peças escolhidas em boas condições entre as 6 retiradas da caixa.
Então, X segue uma distribuição Hipergeométrica $H(Mp, M(1-p), N)$ em que p representa a proporção de peças funcionais na caixa e M o número de peças que estão na caixa ($M = 20$).

$$X \sim H(15, 5, 6)$$

(40% cotação)
Pretende-se

$$P(X \geq 4) = \sum_{i=4}^{6} P(X = i) =$$

(20% cotação)

$$= \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{2} + \binom{15}{5}\binom{5}{1} + \binom{15}{6}\binom{5}{0}}{\binom{20}{5}} \cong 0.8687$$

A probabilidade do robot ficar funcional é 0.8687.
(40% cotação)

4.

4.1 - 0.5 valores

Seja X - v.a. número de ananases produzidos por semana,
$X \sim Poisson(\lambda = 121.95)$ *(25% cotação)*
Pretende-se:

$$P(X \geq 130) =$$

(25% cotação)

$$= 1 - P(X \leq 129) =$$

(20% cotação)

$$= 1 - \sum_{i=0}^{129} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} =$$

(20% cotação)

$$= 1 - 0.7555 = 0.2445$$

Em 24.45% das semanas produziram-se 130 ananases ou mais.
(10% cotação)

4.2 - 0.5 valores

$$P(X \leq 100) =$$

(40% cotação)

$$= \sum_{i=0}^{100} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=0}^{100} e^{-121.95} \frac{121.95^i}{i!}$$

(40% cotação)

$$= 0.0234$$

Em 2.34% das semanas produziram-se 100 ananases ou menos.
(20% cotação)

5. - 0.5 valores

X - v.a. número de copos defeituosos no pacote, assumindo que os clientes tiram vantagem da possibilidade de devolução, $X \sim Binomial(n = 10, p = 0.01)$ *(20% cotação)*
A probabilidade de um pacote ser devolvido é:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

(20% cotação)

$$= 1 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} (0.01)^0 (0.99)^{10} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} (0.01)^1 (0.99)^9 \cong 0.005$$

(20% cotação)
Seja Y - v.a. número de pacotes que o cliente devolve, $Y \sim Binomial(n = 3, p = 0.005)$.
(20% cotação)
Pretende-se saber:

$$P(Y = 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (0.005)^1 (0.995)^2 = 0.15$$

A a probabilidade de que apenas um pacote seja devolvido é 0.15.
(20% cotação)

FIM