Análise Infinitesimal
21175 — ano lectivo 2022-2023
fevereiro de 2023

e-fólio Global

época normal
proposta de resolução

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com expressão

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} + x + 1}{x^2 + 1} & x < 0 \\ \\ x^2 - x\sin(\pi x) + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f não é contínua em $x = 0$.

b) Estude a diferenciabilidade de f indicando $D_{f'}$, o maior domínio possível para a sua derivada, e a expressão de f' nesse domínio.

c) Calcule o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Resolução:

a) No ponto $x = 0$, o limite lateral à esquerda

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{x+1} + x + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{e^{0+1} + 0 + 1}{0 + 1} = e + 1$ difere do valor da função no ponto: $f(0) = 0 - 0 \times \sin(0) + 2 = 2$, logo a função $f(x)$ não é contínua em 0.

O cálculo directo do limite lateral é possível pois a função $\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, no ponto $x = 0$. A função e^x é uma função básica e, portanto contínua. A sua composição com o polinómio $x + 1$ é também contínua e está definida pois o polinómo é uma função contínua e está sempre no domínio da exponencial que é $\mathbb{R}$. A soma e o quociente dessa função composta com dois polinómios é ainda uma função contínua. Para além disso a função no denominador nunca se anula pois $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Nota: no enunciado é dito que a função f é contínua mas isso só garante a continuidade da função $\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}$ em $]-\infty, 0[$. No entanto, para o cálculo directo do

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

limite, temos de mostrar que a função $\frac{e^{x+1}+x+1}{x^2+1}$ não é descontínua em $x=0$.

b) **Ponto $x=0$:** Pela alínea anterior sabemos que f não é contínua em $x=0$, logo f não é diferenciável em $x=0$, isto é $0 \notin D_{f'}$.

Primeiro ramo: A função e^x é uma função básica e, portanto diferenciável. A sua composição com o polinómio $x+1$ é também diferenciável pois o polinómo é uma função diferenciável. A soma e o quociente dessa função composta com dois polinómios é ainda uma função diferenciável. Portanto $f(x)$ é diferenciável em $]-\infty, 0[$. Vamos calcular a expressão da derivada de f neste intervalo:

$$f'(x) = \frac{\left(e^{x+1}+x+1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(e^{x+1}+x+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{\left(e^{x+1}+1\right)\left(x^2+1\right)-2x\left(e^{x+1}+x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Segundo ramo: A função $x^2 - x\sin(\pi x) + 2$ é elementar e, portanto, diferenciável. É elementar pois é obtida a partir das funções básicas: função $\sin(x)$ composta com o monómio πx, monómio x^2 e função constante 2 (por adição), e identidade (por multiplicação). Logo f é diferenciável em $]0, +\infty[$. A expressão da derivada de f neste intervalo é:

$$f'(x) = \left(x^2 - x\sin(\pi x) + 2\right)' = 2x - \sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x).$$

Conclusão: A função $f(x)$ tem derivada com domínio $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e com expressão

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(e^{x+1}+1\right)\left(x^2+1\right) - 2x\left(e^{x+1}+x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} & x < 0 \\[2ex] 2x - \sin(\pi x) - \pi x\cos(\pi x) & x > 0 \end{cases}$$

c) Consideramos a restrição de f ao intervalo $\mathbb{R}^+$. Aí temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x\sin(\pi x) + 2}{x^2}$. O limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ não existe, pelo que vamos separar uma parcela contendo este termo e tentar usar aí o Teorema dos limites enquadrados.

O limite pretendido iguala

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2}.$$

Temos $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$. Para além disso, temos $-1 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ e, sendo $x \in \mathbb{R}^+$, temos $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(\pi x)}{x} \leq \frac{1}{x}$. Como

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ então, pelo Teorema dos limites enquadrados, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(\pi x)}{x} = 0$.

Portanto, o limite pedido é

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sin(\pi x) + 2}{x^2} = 1 - 0 + 0 = 1.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

2. Considere a função $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 2$, com derivada $f'(x) = 20x^3(x-1)$.

a) Mostre que é verdadeira a seguinte afirmação: A função f tem, no máximo, uma raiz em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

b) Recorrendo, se necessário, à afirmação da alínea anterior, mostre que f tem exactamente uma raiz e que esta se encontra no intervalo $]-\infty, 0[$.

Resolução:

a) Como a função é um polinómio então é contínua e diferenciável. A sua derivada também é contínua e anula-se em $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 20x^3(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$. Então nos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$ a derivada não se anula.

Queremos mostrar que em cada um desses intervalos existe, no máximo, uma raiz da função f. Vamos supor que em um desses intervalos, I, existem duas raízes de f, isto é, existem $a, b \in I$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe um $c \in]a, b[\subset I$ tal que $f'(c) = 0$, o que contradiz a nossa afirmação anterior de que a derivada não se anula em cada um desses intervalos. Portanto podemos concluir que a função f tem, no máximo, uma raiz em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

b) Observamos que $f(0) = 2 > 0$ e que $f(1) = 1 > 0$. Por outro lado, observamos que $f(x) = x^5\left(4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^5}\right)$ e, portanto, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Havendo pontos $a, b \in]-\infty, 0[$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ então, pelo Teorema dos valores intermédios, existe um ponto $c \in]-\infty, 0[$ tal que $f(c) = 0$. Isto é, existe uma raiz de f nesse intervalo.

Nos restantes intervalos a função é monótona, tal como mostramos de seguida. O termo $20x^3 > 0$ para $x > 0$, e o termo $x - 1$ é negativo para $0 < x < 1$ e positivo para $x > 1$. Assim, a derivada $f'(x) = 20x^3(x-1)$ é negativa em $]0, 1[$ e positiva em $]1, +\infty[$, o que implica que a função f é monótona decrescente em $]0, 1[$ e monótona crescente em $]1, +\infty[$. Logo a restrição da função f ao intervalo $]0, 1[$ tem contradomínio $]1, 2[$ e a restrição ao intervalo $]1, +\infty[$ tem contradomínio $]1, +\infty[$. Estes intervalos não contêm a origem e, portanto, a função não tem raízes aí.

Está assim mostrado que f tem apenas uma raiz e que esta se encontra em $]-\infty, 0[$.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

3. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

a) $\dfrac{1}{2x^2+1} + e^x \cos(5e^x) - x^3$.

b) $(3x+5)e^{-3x}$.

Resolução:

a) Temos

$$\int \left(\frac{1}{2x^2+1} + e^x \cos(5e^x) - x^3 \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{2x^2+1} dx + \int e^x \cos(5e^x) dx - \int x^3 dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x)^2+1} dx + \frac{1}{5} \int 5e^x \cos(5e^x) dx - \int x^3 dx =$$

$$= \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(5e^x)}{5} - \frac{x^4}{4} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

b) Temos $\int (3x+5)e^{-3x} dx = \int 3xe^{-3x} dx + \int 5e^{-3x} dx$. O segundo integral indefinido é igual a $-\frac{5}{3} \int -3e^{-3x} dx = -\frac{5}{3} e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}$.

Vamos fazer a primitivação por partes de $\int 3xe^{-3x} dx$ sendo $u' = e^{-3x}$ e $v = 3x$, e tendo $u = -\frac{1}{3} e^{-3x}$ e $v' = 3$. Logo

$$\int \underbrace{3x}_{v} \underbrace{e^{-3x}}_{u'} dx = \underbrace{-\frac{1}{3} e^{-3x}}_{u} \underbrace{3x}_{v} - \int \underbrace{-\frac{1}{3} e^{-3x}}_{u} \times \underbrace{3}_{v'} dx =$$

$$= -x\, e^{-3x} + \int e^{-3x} dx = -x\, e^{-3x} - \frac{1}{3} e^{-3x} + C =$$

$$= -\left(x + \frac{1}{3} \right) e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Portanto a família de primitivas da função é

$$-\frac{5}{3} e^{-3x} - \left(x + \frac{1}{3} \right) e^{-3x} + C = -(x+2)e^{-3x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

4. Calcule a área da região definida por

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1\,, \ \ 0 \leq y \leq \frac{1+x^2}{1+x}\right\}.$$

Resolução:A área é dada por

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x} dx.$$

Para calcular este integral vamos decompor a função racional em fracções simples. Fazendo a divisão do polinómio no numerador pelo polinómio no denominador obtemos

$$\frac{1+x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{2}{1+x}.$$

Logo, temos

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x}\, dx = \int_0^1 (x-1)\, dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + 2\left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + 2\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = 2\ln(2) - \frac{1}{2}.$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt