Lógica e Teoria de Conjuntos | 21079 - Resolução

Período de Realização

Decorre de 6 a 13 de janeiro de 2020

Data de Limite de Entrega

13 de janeiro de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Cálculo de Predicados

Competências

a) conhecer e aplicar a linguagem do cálculo de predicados;

b) conhecer e aplicar a semântica do cálculo de predicados;

c) construir demonstrações formais no cálculo de predicados.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os quatro exercícios constantes no enunciado. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores distribuídos do seguinte modo: 2 valores para o primeiro exercício proposto, 0.8 valores para o segundo, 0.5 valores para o terceiro e 0.7 valores para o quarto;

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **nove** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Gilda Ferreira

Enunciado

1. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem cujos parâmetros $\bar{n}$ (símbolos de constantes), P (símbolo de predicado 1-ário), Q, R (símbolos de predicados 2-ários) e respetivas interpretações são:

Domínio de interpretação: as variáveis denotam os números inteiros não negativos ($\mathbb{N}_0$).
$\bar{n}$: "o número n".
$P(x)$: "x é número primo".[1]
$Q(x, y)$: "x é estritamente maior do que y".
$R(x, y)$: "x divide y".

(a) Indique as variáveis que ocorrem livres, as variáveis que ocorrem ligadas e os símbolos de constantes na seguinte fbf de $\mathcal{L}$:

$$P(x) \wedge R(x, \bar{12}) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge R(y, \bar{2}) \wedge Q(x, y)).$$

Resolução A única variável que ocorre livre é a variável x; a única variável que ocorre ligada é a variável y e os símbolos de constantes que ocorrem na fórmula são $\bar{12}$ e $\bar{2}$.

(b) Considerando a fórmula da alínea **(a)**, apresente, se possível, duas instanciações para a variável x, uma que torne a fórmula verdadeira e outra que a torne falsa.

Resolução A instanciação $x := 2$ torna a fórmula falsa pois a implicação ficaria com antecedente verdadeiro e consequente falso. A instanciação $x := 3$ torna a fórmula falsa pois a implicação teria antecedente verdadeiro e consequente verdadeiro. [Note que qualquer elemento do domínio que não o 2 tornaria a fórmula verdadeira.]

(c) Traduza para a linguagem $\mathcal{L}$ as seguintes afirmações:

(i) Todo o número primo é divisível por 1.
Resolução $\forall x(P(x) \Rightarrow R(\bar{1}, x))$

(ii) Existe um número primo estritamente maior do que 11 e estritamente menor do que 15.
Resolução $\exists x(P(x) \wedge Q(x, \bar{11}) \wedge Q(\bar{15}, x))$

(d) Traduza para a linguagem corrente (o mais simples possível) a seguinte fbf de $\mathcal{L}$

$$\forall x(Q(x, \bar{1}) \Rightarrow \exists y(P(y) \wedge R(y, x))).$$

[1] Consideramos a usual definição de número primo: "um número é primo se tem exatamente dois divisores distintos: ele próprio e o número 1."

Resolução “Todo o número inteiro não negativo estritamente maior do que 1 é divisível por um número primo.” Ou equivalentemente “Todo o número inteiro estritamente maior do que 1 é divisível por um número primo.”

2. Escreva, em português corrente, a negação de cada uma das seguintes asserções sem usar a formulação inicial “Não é verdade que... ”.

(a) Toda a cobra é venenosa.

Resolução Como

$$\neg(\forall x(C(x) \Rightarrow V(x))) \Leftrightarrow \exists x \neg(\neg C(x) \vee V(x)) \Leftrightarrow \exists x(C(x) \wedge \neg V(x)),$$

a negação pretendida é: “Existe (pelo menos) uma cobra que não é venenosa”.

(b) Algumas pedras são preciosas.

Resolução Como

$$\neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)),$$

a negação pretendida é “Nenhuma pedra é preciosa.”

(c) Nem toda a estrada é perigosa.

Resolução Como $\neg(\exists x(E(x) \wedge \neg P(x))) \Leftrightarrow \forall x(\neg E(x) \vee P(x)) \Leftrightarrow \forall x(E(x) \Rightarrow P(x))$, a negação pretendia é “Toda a estrada é perigosa.”

(d) Nenhum homem é infalível.

Resolução Como $\neg(\neg\exists x(H(x) \wedge I(x))) \Leftrightarrow \exists x(H(x) \wedge I(x))$, a negação pretendia é “Existe (pelo menos) um homem que é infalível.”

3. Considere uma linguagem $\mathcal{L}$ com o símbolo de igualdade e sem quaisquer outros parâmetros. Como seriam as interpretações de $\mathcal{L}$[2] que tornariam a formula $\forall x \forall y\, x = y$ verdadeira?

Resolução Seriam interpretações cujo domínio fosse um conjunto singular (isto é, formado por um único elementos) ou interpretações cujo domínio fosse constituído por elementos iguais entre si (no caso de interpretações numéricas os dois tipos de interpretações coincidem).

4. Demonstre, em dedução natural, que

$$\forall x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \forall x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)).$$

Resolução

$$\begin{array}{rrcl}
- & 1. & \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x)) & Hip. \\
\{v\} & 2. & & Hip.[\forall I] \\
\{v,3\} & 3. & P(v) \Rightarrow Q(v) & Hip.[\neg I] \\
\{v,3\} & 4. & P(v) \wedge \neg Q(v) & 1.[\forall E] \\
\{v,3\} & 5. & P(v) & 4.[\wedge E_1] \\
\{v,3\} & 6. & \neg Q(v) & 4.[\wedge E_2] \\
\{v,3\} & 7. & Q(v) & 3,5[\Rightarrow E] \\
\{v,3\} & 8. & \perp & 6,7[\neg E] \\
\{v\} & 9. & \neg(P(v) \Rightarrow Q(v)) & 3-8[\neg I] \\
- & 10. & \forall x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x)) & 2-9[\forall I]
\end{array}$$

Concluímos assim que $\forall x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \forall x \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

FIM

[2]Estamos a considerar que nessas interpretações $=$ é interpretado da forma usual.