2. Conceitos e Distribuições fundamentais em Estatística

Objectivos

Com o estudo deste capítulo o leitor deverá:

- Ter presentes as principais distribuições estatísticas discretas e contínuas e suas características;
- Saber reconhecer as qualidades de um estimador e proceder à melhor selecção;
- Saber efectuar cálculos e obter representações gráficas das principais distribuições utilizando a aplicação R.

Resumo

Um dos principais objectivos da estatística computacional é, com recurso a processos de simulação a partir de uma ou várias amostras, conseguir ajustar um modelo estatístico à população em causa. É de extrema importância o conhecimento das distribuições de probabilidade mais usadas, quer discretas quer contínuas. Introduzimos a utilização de comandos usados no R para a resolução de alguns problemas envolvendo algumas das distribuições estudadas.

2.1 Funções matemáticas especiais na definição de distribuições estatísticas

2.1.1 Função Gama (*n* > 0, não necessariamente inteiro)

A função gama é sem dúvida uma das funções matemáticas mais usada na definição de importantes funções densidade de probabilidade. Tem-se:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Usando a transformação $x = y^2$ pode obter-se equivalentemente:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

<u>Propriedades importantes da função gama:</u>

$$\Gamma(1) = 1\,; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Para n inteiro positivo temos $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$;

$$\Gamma(n) = (n-1)!;$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

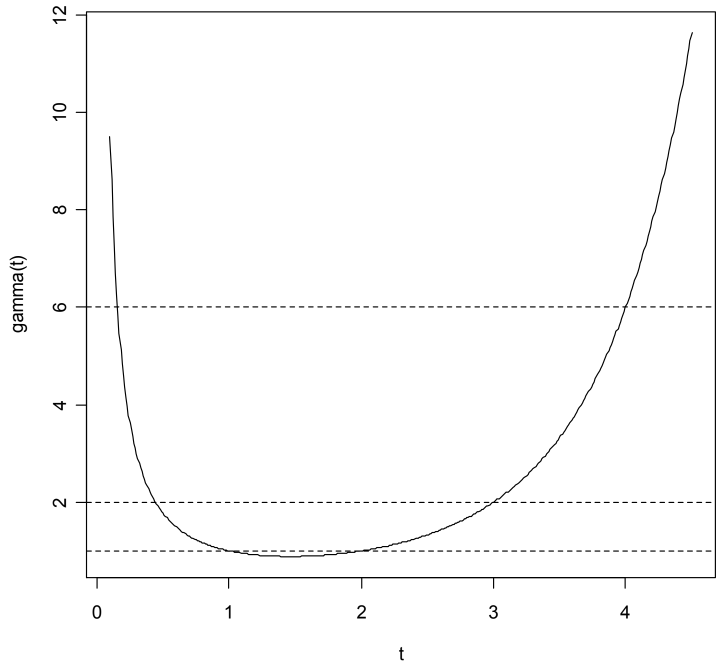
Podemos ainda obter facilmente outros resultados particulares como por exemplo:

$$\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1 \quad ; \quad \Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2 \quad ; \quad \Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 6$$

Confirmemos agora estes resultados usando o R, começando por gerar uma sequência de valores entre 0.1 e 5 usando para tal a função `seq( )`. Façamos,

```
t <- seq(0.1,5,0.01)
plot(t,gamma(t), type=”l”)
abline(h=1,lty=2)
abline(h=2,lty=2)
abline(h=6,lty=2)
```

A figura obtida permite-nos comprovar graficamente os valores obtidos anteriormente,



2.1.2 Função Beta (*m*>0 , *n*>0, não necessariamente inteiros)

Uma função importante para a definição da função densidade de probabilidade de algumas distribuições é a função beta,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Fazendo a transformação $x = sen^2\theta$, obtém-se:

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\theta)^{2m-1}(\cos\theta)^{2n-1}\,d\theta$$

<u>Propriedades importantes da função beta:</u>

$$\beta(m,n) = \beta(n,m)$$

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

2.2 Principais distribuições estatísticas e suas características

2.2.1 Distribuições discretas

Binomial

Seja X uma variável aleatória e p a probabilidade de ocorrência de um acontecimento com interesse ("sucesso"). A distribuição binomial de parâmetros (n , p) tem como função de probabilidade,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0,...,n$$

onde n representa o número de repetições da experiência e p representa a probabilidade de ocorrência do acontecimento com interesse, sendo ainda $q=1-p$ e $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

O número de ocorrências do acontecimento com interesse pode assumir os valores $k=0,...,n$.

Para a distribuição binomial vem $E(X)= np$ e $V(X) = npq$.

Para calcularmos no R o valor de qualquer valor da função de probabilidade com distribuição binomial, devemos usar

```
> dbinom(k, prob=p, size=n)
```

Exemplo 2.1

```
> dbinom(4, prob=0.4, size=10)
[1] 0.2508227
```

ou calcular todos os valores fazendo,

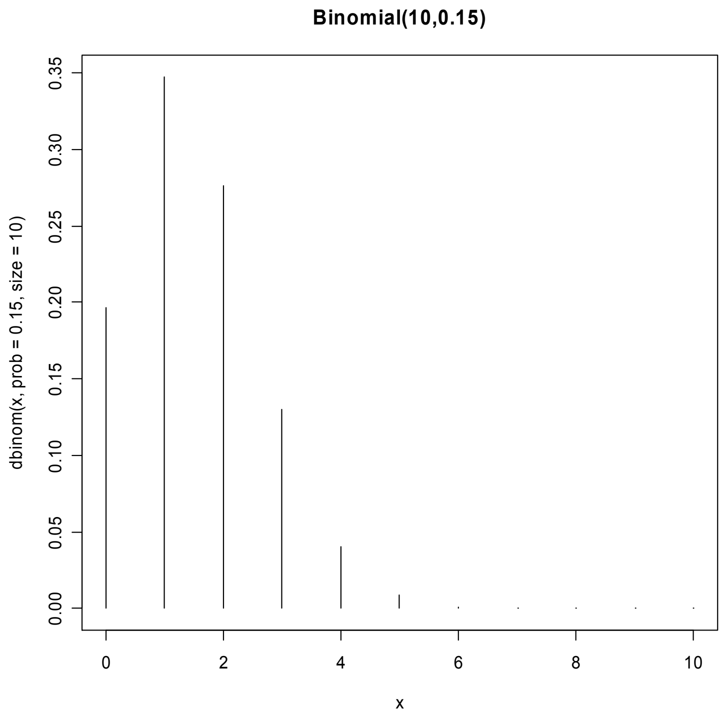
```
> dbinom(1:n, prob=p, size=n)
```

Exemplo 2.2

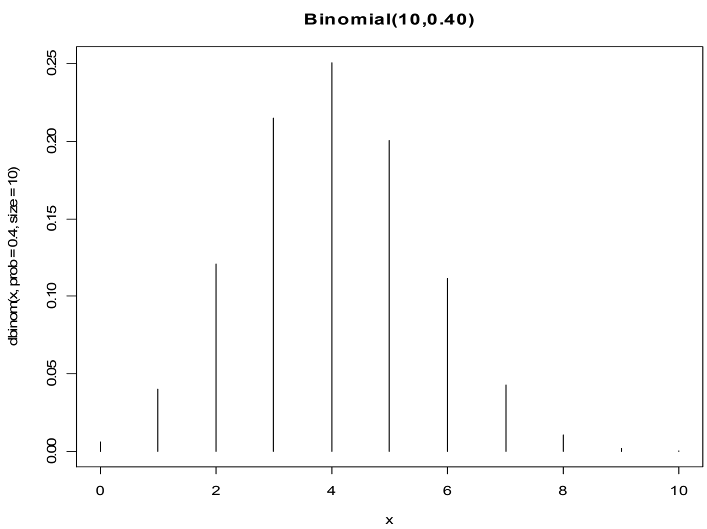
```
> dbinom(0:10, prob=0.40, size=10)
[1] 0.0060466176 0.0403107840 0.1209323520 0.2149908480 0.2508226560
[6] 0.2006581248 0.1114767360 0.0424673280 0.0106168320 0.0015728640
[11] 0.0001048576
```

Facilmente podemos também representações gráficas desta função densidade de probabilidade recorrendo ao R. Vejamos dois exemplos para uma distribuição binomial (10, 0.15) e binomial(10,0.40)

```
> plot(x,dbinom(x,prob=0.15, size=10), type="h", main="Binomial(10,0.15)")
```




```
> plot(x,dbinom(x,prob=0.40, size=10), type="h", main="Binomial(10,0.40)")
```



Podemos também obter a função acumulada da distribuição binomial usando

$$P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} \; p^x \; q^{n-x}$$

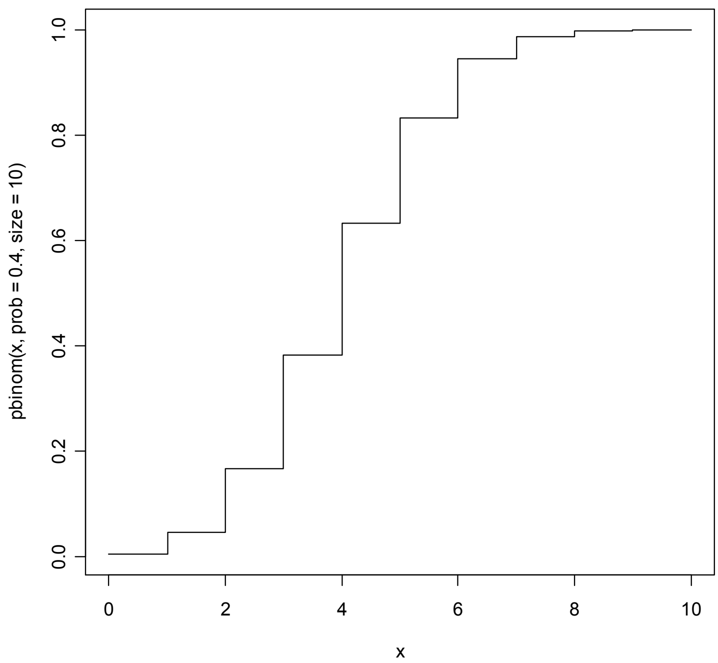
Para obtermos no R o valor acumulado utilizamos o comando `pbinom( )`

Exemplificando, para calcularmos o valor $P(X \leq 4)$ se X seguir uma distribuição binomial (10,0.40), devemos fazer

```
> pbinom(4, prob=0.4, size=10)
[1] 0.6331033
```

O gráfico obtido no R relativo a esta distribuição binomial será obtido com base nas instruções

```
> x <- seq(0,10,1)
> plot(x, pbinom(x, prob=0.40, size=10), type="s")
```



Poisson

Para situações em que n é grande e p pequeno, $n \geq 50 \;\; e \;\; np \leq 5$, a distribuição adequada aos dados será a distribuição de poisson.

Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores $0,\ldots,n$. A função de probabilidade de uma distribuição de poisson é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,\ldots,n\ ; \quad \lambda > 0; \quad \lambda = np$$

A distribuição de Poisson é caracterizada por:

$$E(X)= np = \lambda \quad ; \quad V(X) = np = \lambda$$

Analogamente ao que vimos na distribuição binomial podemos também proceder aos cálculos no R, agora recorrendo ao comando `pois( )`.

Precisamos para tal, de conhecer o parâmetro da distribuição de poisson e utilizar para o cálculo dos valores da função densidade de probabilidade de uma poisson

```
> dpois(0:n, lambda= )
```

e para o cálculo dos valores da função acumulada de uma poisson

```
> ppois(0:k, lambda= )
```

Exemplo 2.3

```
> dpois(0:10, lambda=4)

[1]  0.018315639  0.073262556  0.146525111  0.195366815  0.195366815  0.156293452
0.104195635 0.059540363 0.029770181 0.013231192 0.005292477
```

Exemplo 2.4

```
> ppois(0:15, lambda=4)

 [1] 0.01831564 0.09157819 0.23810331 0.43347012 0.62883694 0.78513039

 [7] 0.88932602 0.94886638 0.97863657 0.99186776 0.99716023 0.99908477

[13] 0.99972628 0.99992367 0.99998007 0.99999511
```

Representações gráficas no R:

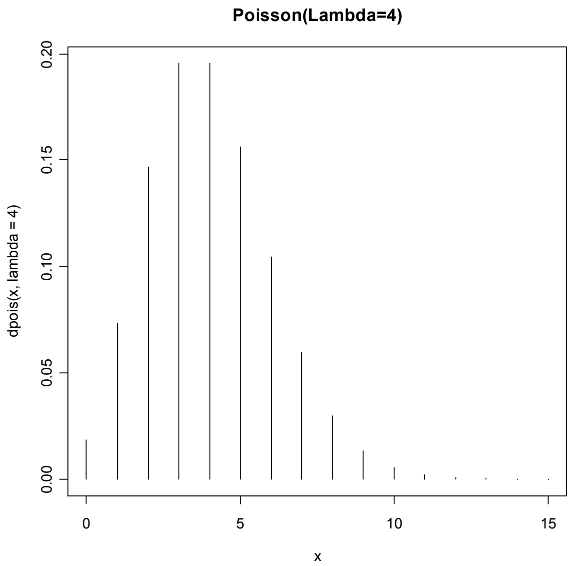
Função densidade de probabilidade de uma distribuição de poisson pode ser obtida usando o código

```
> plot(x, dpois(x, lambda= ), type="h")
```

Exemplo 2.5

```
>x=0:15

>plot(x, dpois(x,lambda=4),type="h",main="Poisson(Lambda=4)")
```



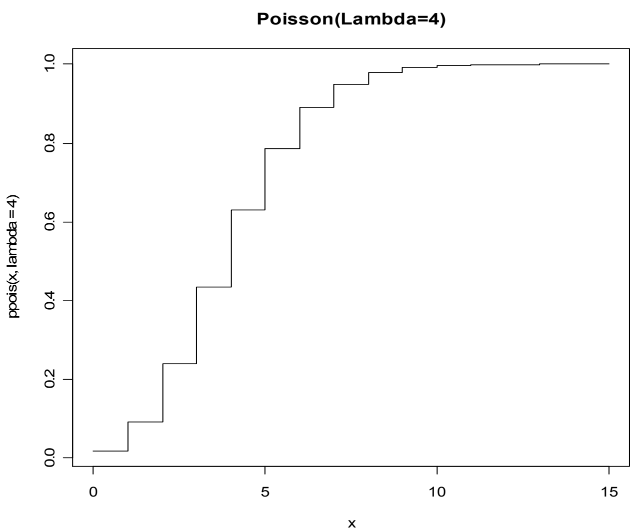
Para o gráfico da função acumulada usamos

```
> plot(x, ppois(x, lambda= ), type="h")
```

Exemplo 2.6

```
>x=0:15

>plot(x,ppois(x,lambda=4),type="s",main="Poisson(Lambda=4)")
```



Hipergeométrica

A distribuição hipergeométrica é adequada a problemas de amostragem sem reposição. Considere uma população constituída por *N* elementos, dos quais *D* possuem uma característica com interesse. Retira-se da população, sem reposição, uma amostra de n elementos e é registado o número de itens com a característica de interesse, *k*.
A variável aleatória *X* tem uma distribuição hipergeométrica, se a função probabilidade for dada por:

$$P(x=k)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k=0,1,2....,\min(n,D)$$

Verifica-se, no caso da distribuição hipergeométrica, que:

$$E(X)=\frac{nD}{N}; \;\; \mathrm{V(X)}=\frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Para obter os valores da função densidade de probabilidade da hipergeométrica no R usamos `dhyper( x , m , n , k ).`

e para obter os valores da função acumulada da hipergeométrica no R usamos `phyper( x , m , n , k ).`

Para obter as representações gráficas usamos novamente a função `plot()`

Exemplo 2.7

A extracção de números do totoloto consiste na extracção de 6 números entre 49 possíveis (se não considerarmos o número suplementar). Considerando X o número de acertos numa aposta de 6 números calcule as probabilidades de:

a) acertar 1 número sabendo-se que aposta foi de 6 números.

b) Acertar 3 números se a aposta foi de 8 números.

Dados: N=49 ; *n*= 6 ; D=6

a) m=49-6=43 ; *n*= 6 ; k=6 ; x=5 (número de falhanços) logo,

```
> dhyper(5,43,6,6)
[1] 0.4130195
```

A probabilidade de acertar em apenas 1 número é cerca de 41%.

a) m=49-8=41 ; n= 6 ; k=8 ; x=3 (número de falhanços) logo,

```
> dhyper(3,41,8,6)
[1] 0.04268935
```

A probabilidade de acertar 3 números em 8 é cerca de 4,3%.

2.2.2 Distribuições contínuas

São apresentadas em seguida algumas das distribuições estatísticas contínuas mais importantes.

Uniforme

Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme no intervalo $[a,b]$, para $a<b$ fixos, se:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & caso\ contrário\end{cases}$$

Propriedades importantes:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}\quad ;\quad V(X)=\frac{(a+b)^2}{12}$$

Vejamos agora alguns exemplos de aplicação recorrendo ao R:

Exemplo 2.7

a) Gerar 15 valores com distribuição uniforme no intervalo [0,1].

```
> runif(15)

 [1]  0.56604867  0.40783975  0.23969676  0.22823149  0.02497434
0.54427914
 [7]  0.41217188  0.28198127  0.75696381  0.26141669  0.98067119
0.45054371
[13] 0.76611735 0.52993907 0.45248295
```

b) Gerar 15 valores com distribuição uniforme no intervalo [5,15].

```
> runif(15,min=5,max=15)

 [1] 12.101468 12.426009  6.482439 10.425879  9.521707  7.707605
7.782970
 [8] 11.184981  6.128821 14.898167 11.004657  6.060963 13.285380
7.060493
[15] 11.768682
```

Exemplo 2.8

Sendo X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo [0,12], calcule $P(3<X<8)$.

```
> punif(8, min=0, max=12)-punif(3, min=0, max=12)

[1] 0.4166667
```

Gama

Considere uma variável aleatória contínua X, não negativa. Esta variável aleatória obedece a uma distribuição gama se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, x\in R^{+}\\ 0, \quad x\notin R^{+}\end{cases}$$

A distribuição está dependente dos parâmetros *r* e α, sendo *r>0* e $\alpha > 0$. A forma da distribuição gama está dependente dos valores escolhidos para *r* e α.

A distribuição gama é caracterizada pela média e variância:

$$E(X)=\frac{r}{\alpha};\ V(X)=\frac{r}{\alpha^2}$$

Propriedade importante: A distribuição gama pode relacionar-se com a binomial, pois pode provar-se que, se *X* tem distribuição binomial de parâmetros *n, p* , e para todo $0 \le a \le n$:

$$\sum_{x=a}^{n}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(a)\Gamma(n-a+1)}\int_0^p x^{a-1}(1-x)^{n-a}\,dx$$

Para trabalhar no R necessitamos de ter os argumentos *shape* e *rate* que são definidos da seguinte forma $shape=\frac{1}{\beta}\times\mu$, sendo $\frac{1}{\beta}\times\frac{\mu}{\sigma^2}$ e $rate=\frac{\mu}{\sigma^2}$.

Exemplo 2.9

a) Representar graficamente distribuições gama com os seguintes parâmetros:

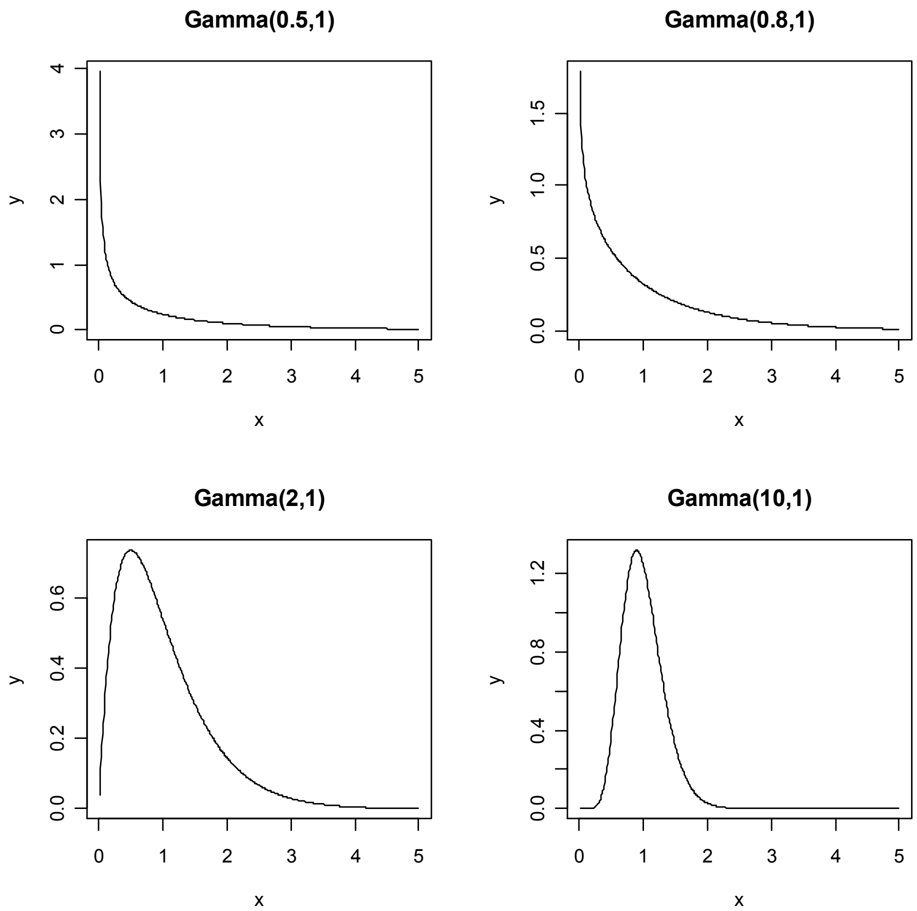
a1) $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 2$

a2) $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 1.25$

a3) $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 0.5$

a4) $\mu = 1$ e $\sigma^2 = 0.1$

```
x<-seq(0.01,5,0.01)
par(mfrow=c(2,2))
y<-dgamma(x,0.5,0.5)
plot(x,y,type="l", main="Gamma(0.5,1)")
y<-dgamma(x,0.8,0.8)
plot(x,y,type="l", main="Gamma(0.8,1)")
y<-dgamma(x,2,2)
plot(x,y,type="l", main="Gamma(2,1)")
y<-dgamma(x,10,10)
plot(x,y,type="l", main="Gamma(10,1)")
```



b) Sendo X uma variável aleatória com distribuição gama de média 3 e variância 4, calcule o quantil esperado a 99%.

Dado que $shape = \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{4}$ e $rate = \frac{3}{4}$ virá

```
> qgamma(0.99,9/4,3/4)
[1] 9.46255
```

Beta

Uma variável aleatória X tem distribuição beta, para m qualquer e $n > 0$, se

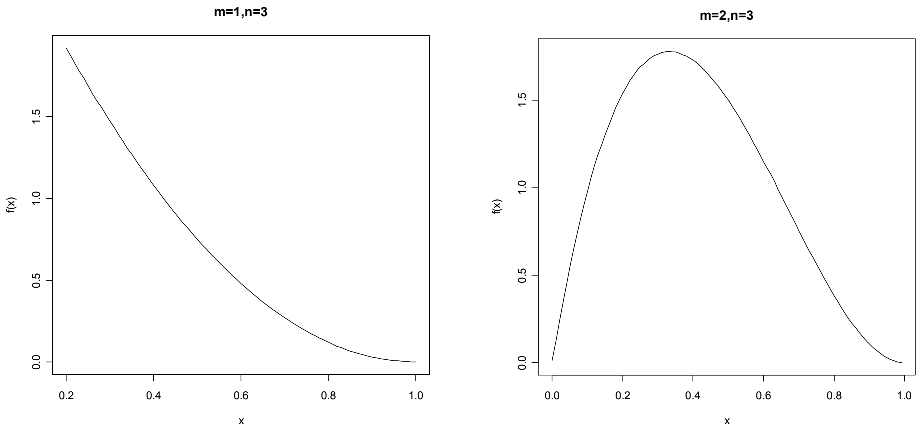
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(m,n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

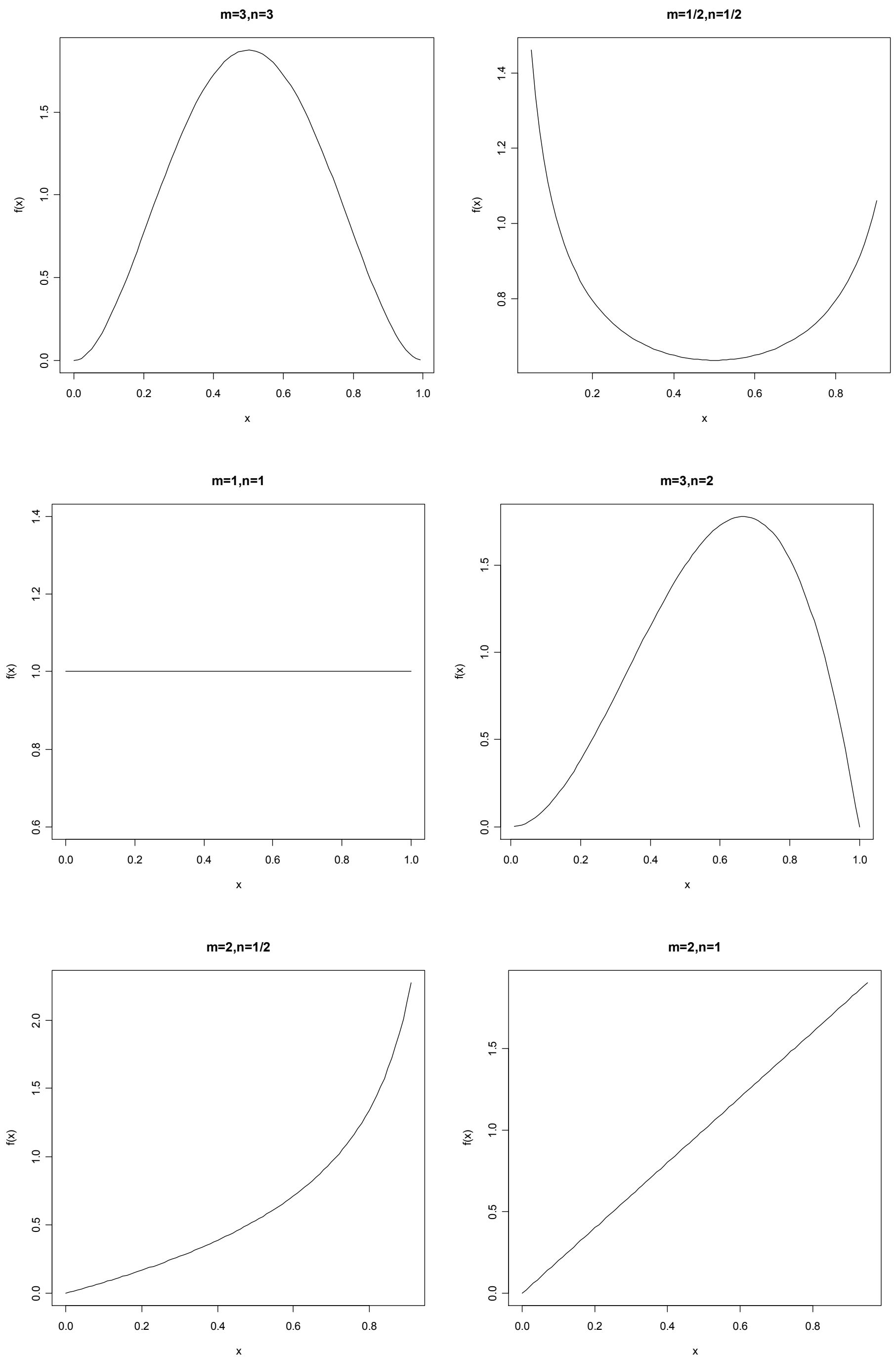
Propriedade importante: A distribuição beta, para $m = n = 1$ é igual à distribuição uniforme $[0,1]$.

Nas figuras seguintes apresenta-se a forma da distribuição beta para diferentes combinações de valores dos parâmetros. A primeira representação foi obtida no R a partir do seguinte código:

```
>x <- seq(0.01,1,0.01)
Y <- dbeta(x, shape1=1, shape2=3)
plot(x,y,type="l", ylab="f(x)",main="m=1,n=3")
```

As restantes figuras foram obtidas de forma análoga, fazendo variar os valores dos parâmetros m e n.





Exemplo 2.10

Obter utilizando o R, dez números pseudo-aleatórios com distribuição beta de parâmetros m=3 e n=5.

```
> rbeta(10,3,5)
 [1] 0.3922287 0.5816652 0.1176951 0.3325129 0.5599780 0.2305562
0.4681462
 [8] 0.5878444 0.6684464 0.2147139
```

Exponencial

Para distribuições gama com $r=1$, tem-se um caso particular conhecido como distribuição exponencial.

Admitindo $\alpha>0$ constante e para todo $x \geq 0$, a função densidade de probabilidade de uma distribuição exponencial é dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x \in R^{+}\\ 0, \quad x \notin R^{+}\end{cases}$$

A distribuição exponencial tem média e variância:

$$E(X)=\frac{1}{\alpha}; \;\; V(X)=\frac{1}{\alpha^2}$$

Propriedades importantes:

Pode provar-se que a soma de r variáveis exponenciais independentes, de parâmetro α obedece a uma distribuição gama de parâmetros r e α;

A distribuição exponencial usufrui da importante característica de não possuir memória.

Exemplo 2.10

Obter utilizando o R, dez números pseudo-aleatórios com distribuição exponencial com parâmetro $\alpha=1$.

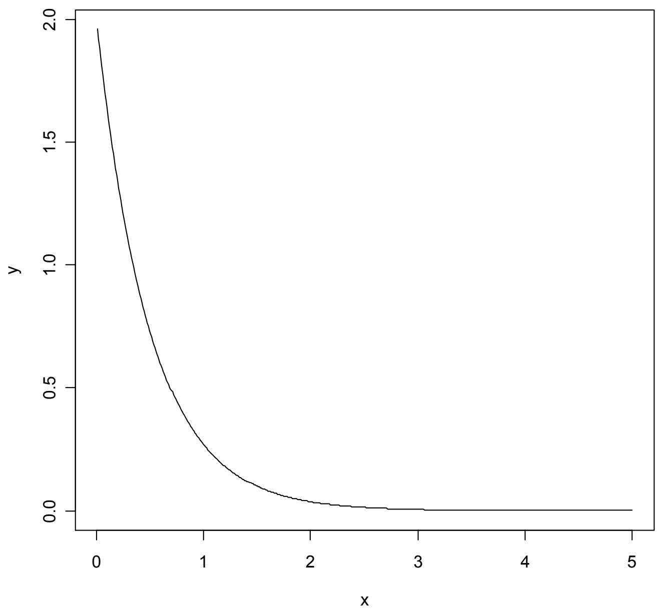
```
> rexp(10,1)
 [1] 0.3852460 1.3140516 0.4180289 0.8570764 0.2645479 2.0145845
0.5771072 0.1781249 0.4088821 2.5860465
```

Exemplo 2.11

Obter uma representação gráfica de uma distribuição exponencial com parâmetro $\alpha=2$.

```
x <- seq(0.01,5,0.01)
```

```
y <- dexp(x,2)
plot(x,y,type="l")
```



Qui-Quadrado

Para distribuições gama com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{n}{2}$, n inteiro positivo, tem-se um caso particular, com um parâmetro, conhecido como distribuição qui-quadrado.

A função densidade de probabilidade de uma distribuição qui-quadrado é dada por:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{(n/2)-1} e^{-z/2}, z \in R^{+} \\ 0, \quad z \notin R^{+} \end{cases}$$

Representa-se por χ_n^2 e diz-se que z tem uma distribuição do qui-quadrado com n graus de liberdade.

A distribuição qui-quadrado é caracterizada pelas propriedades:

$$E(Z) = n; \quad V(Z) = 2n$$

<u>Nota importante</u>: A soma de *n* variáveis aleatórias normais reduzidas independentes tem distribuição qui-quadrado com *n* graus de liberdade.

Exemplo 2.12

a) Obter o valor e $P\left(\chi^2_{15}\right) \leq 20$, representando χ^2_{15} uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado, com 15 graus de liberdade.

```
> pchisq(20,df=15)
[1] 0.8280673
```

b) Calcule $\chi^2_{0.01,20}$.

```
> qchisq(1-0.01,df=20)
[1] 37.56623
```

Normal

Seja X uma variável aleatória contínua de média populacional μ e variância σ^2.
A função densidade de probabilidade de uma distribuição normal é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \;, \; -\infty < x < \infty$$

Esta distribuição é caracterizada por:

$$E(X) = \mu \quad ; V(X) = \sigma^2$$

A notação usual para representar uma variável aleatória X com média μ e variância σ^2 é $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Os parâmetros μ e σ devem obedecer a $-\infty < \mu < +\infty$ e $\sigma > 0$.

<u>Caso particular</u>: Tem extrema importância a distribuição normal de média zero e variância 1, conhecida como distribuição normal reduzida, pois qualquer distribuição normal pode ser convertida nesta, usando a expressão:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Uma vez que $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$, pode escrever-se:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

A variável aleatória Z diz-se normal reduzida ou standard, $Z \sim N(0,1)$ e encontra-se tabelada.

Vejamos de seguida alguns exemplos, usando a aplicação R:

Exemplo 2.13

- **a)** Calcular $P(Z < 1.96)$, sendo Z uma variável aleatória com distribuição normal (0,1).
- **b)** Calcular $P(X < 10)$, sendo X uma variável aleatória com distribuição normal de média $\mu = 5$ e variância $\sigma^2 = 9$.
- **c)** Calcular $P(X > 10)$, sendo X uma variável aleatória com distribuição normal de média $\mu = 15$ e variância $\sigma^2 = 16$.
- **d)** Obter 20 números pseudo-aleatórios com distribuição normal (0,1).

Resolução:

a)

```
> pnorm(1.96,mean=0,sd=1)
[1] 0.9750021
```

b)

```
> pnorm(10,mean=5,sd=3)
[1] 0.9522096
```

c)

```
> 1-pnorm(10,mean=15,sd=4)
[1] 0.8943502
```

d)

```
> rnorm(20,mean=0,sd=1)
 [1]   0.018550074   0.003958449  -1.411606725      0.198437536  -
0.720397683 1.498143971 -0.356523211     0.017713586   2.174880546
1.472416328          -1.533898239   -0.855477511     0.958309950  -
1.514228345  1.482236807   -0.583208506 -1.056104104 -0.336018654
0.994668725  1.787906392
```

Weibull

A função densidade de probabilidade para uma distribuição Weibull é dada por:

$$f(x) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} \times e^{\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right]}, \; x \geq 0, \; com \;\; \theta > 0, \beta > 0$$

A distribuição Weibull é caracterizada pela média e variância seguintes:

$$E(X) = \theta\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \;;\;\; V(X) = \theta^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

<u>Nota importante:</u> Para $\beta = 1$ a distribuição Weibull é um caso particular da distribuição exponencial, com $E(X) = \frac{1}{\theta}$.

t-de-Student

Seja *X* uma variável aleatória com distribuição normal reduzida e *Y* uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Se *X* e *Y* são variáveis aleatórias independentes, então:

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

obedece a uma distribuição t-de-Student com n graus de liberdade.

A função densidade de probabilidade da variável aleatória *X* com distribuição t-de-Student é dada por:

$$f(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\quad\Gamma(n/2)}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < t < +\infty$$

A distribuição t-de-Student é caracterizada pela média e variância seguintes:

$$E(X) = 0 \;\; ; \;\; V(X) = \frac{n}{n-2}, \; n > 2$$

F de Snedecor

Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes, com distribuição do Qui-quadrado, com n e m graus de liberdade respectivamente. Diz-se que,

$$F_{n,m} = \frac{X/n}{Y/m},$$

segue uma distribuição F com n graus de liberdade no numerador e m graus de liberdade no denominador.

A função densidade de probabilidade da variável aleatória *X* com distribuição F é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{x^{(n/2)-1}}{\left[\left(\frac{n}{m}\right)x+1\right]^{(n+m)/2}}, \quad x > 0$$

Esta distribuição é caracterizada pelos parâmetros:

$$E\left[F_{n,m}\right]=\frac{m}{m-2},\ m>2\,;\quad V\left[F_{n,m}\right]=\frac{m^2(2m+2n-4)}{n(m-2)^2(m-4)},\quad m>4$$

Na tabela seguinte apresentam-se as abreviações e argumentos usados pelo R. De notar que antes da abreviação, devemos acrescentar a letra `d` para a função densidade de probabilidade, `p` para a função densidade acumulada, q para a função de quantis e r para a geração aleatória de uma amostra de valores.

Tabela 2.1 Abreviações e argumentos usados pelo R

Distribuição	**Abreviação**	**Argumentos**
Binomial	`rbinom(x,n,p)`	`n,p`
Poisson	`rpois(x,lambda)`	`lambda`
Geométrica	`rgeom(x,p)`	`p`
Hipergeométrica	`rhyper(x,m,n,k)`	`m,n,k`
Uniforme	`runif(x,min,max)`	`min,max`
Normal	`rnorm(x,mean,sd)`	`mean,sd`
Lognormal	`rlnorm(x,mean,sd)`	`mean,sd`
Exponencial	`rexp(x)`	`rate`
Qui-Quadrado	`rchisq(x,df)`	`df`
t de Student	`rt(x,df)`	`df`
F de Snedecor	`rf(x,df1,df2)`	`df1,df2`
Weibull	`rweibull(x,shape,scale)`	`shape,scale`
Gama	`rgamma(x,shape,scale)`	`shape,scale`
Beta	`rbeta(x,a,b)`	`a,b`
Cauchy	`rcauchy(x,location,scale)`	`location,scale`
Wilcoxon	`rwilcox(m,n)`	`m,n`
Logística	`rlogis(x,location,scale)`	`location,scale`

Nota: Antes da abreviação, deve acrescentar-se a letra `d` para a função densidade de probabilidade, a letra `p` para a função acumulada, a letra `q` para a função de quantis e `r` para a geração aleatória de uma amostra.

2.3 Exercícios Propostos

2.3.1 Represente graficamente uma distribuição binomial considerando $n = 80$ e $p = 0.10$.

2.3.2 Obtenha o gráfico da função distribuição acumulada da binomial descrita na alínea anterior.

2.3.3 Represente graficamente a distribuição normal (0,1), no intervalo [-3,3].

2.3.4 Obtenha o gráfico da função de distribuição acumulada da normal (0,1) no intervalo [-3,3].

2.3.5 Determine o valor de x a que corresponde uma probabilidade acumulada de 0.975 numa distribuição normal (0,1).

2.3.6 Calcule a probabilidade de uma variável distribuída como uma normal com média 15 e desvio padrão 3, ser menor que 12.

2.3.7 Calcule a probabilidade de se obter 5 caras em 5 lançamentos de uma moeda não viciada.

2.3.8 Calcule a probabilidade $P(X > 5)$ numa distribuição χ^2 com 3 graus de liberdade.

2.3.9 Proceda à geração de 10 números pseudo-aleatórios com distribuição uniforme no intervalo [2,10].

2.3.10 Uma variável aleatória X tem distribuição binomial com parâmetros n e p, onde n é um inteiro positivo e $p \in [0,1]$. Supondo que $X \sim Bin(20, 0.25)$, determine:

a) Cinco números pseudo-aleatórios de *X*.

b) $P(X \geq 10)$ e $P(X = 6)$.

c) O valor de x tal que $P(X \leq x) =$ 0.8981881