

Estado	Terminadas
Iniciado em	quarta-feira, 15 outubro 2025, 15:18
Completado em	quarta-feira, 15 outubro 2025, 19:30
Tempo usado	4 horas 12 minutos
valores	7,00/7,00
Avaliação	1,00 num máximo de 1,00 (100%)

Informação

Definição formal de limite

No manual é introduzida de forma intuitiva a definição de limite (página 38), mas não é dada a definição formal. Assim, vamos introduzir a seguinte :

Definição – Dizemos que uma função f tem limite $b \in \mathbb{R}$, quando x tende para $a \in \mathbb{R}$, se para todo o $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o x que verifique $0 < |x - a| < \delta$ se tem $|f(x) - b| < \epsilon$. Em notação de quantificadores,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Exemplo – Provemos por definição que $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$.

Pretende-se ver que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 6| < \epsilon$. Temos $|3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$ e para provarmos o pretendido deveremos ter:

$$3|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon/3$, para que tenhamos

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 6| < \epsilon,$$

o que prova o pretendido. Em geral o valor de δ escolhido vai depender de ϵ .

Analogamente poderá ser definido o limite de uma dada função, quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição – Dizemos que uma função f tem limite $b \in \mathbb{R}$, quando x tende para $+\infty$, se para todo o $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o x que verifique $x > \delta$ se tem $|f(x) - b| < \epsilon$. Em notação de quantificadores,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

Definição – Dizemos que uma função f tem limite $b \in \mathbb{R}$, quando x tende para $-\infty$, se para todo o $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o x que verifique $x < -\delta$ se tem $|f(x) - b| < \epsilon$. Em notação de quantificadores,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x < -\delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Vamos exercitar o que aprendemos sobre limites?

Calcule os seguintes limites:

Pergunta **1**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x}{5x + 3}$$

Selecione uma opção:

☐ a. $\frac{5}{7}$
☒ b. $\frac{5}{6}$
Passo 1: Substituir diretamente $x = 3$

$$\frac{3^2 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 3 + 3} = \frac{9 + 6}{15 + 3} = \frac{15}{18}$$

Passo 2: Simplificar a fração

$$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $\frac{5}{6}$ Pergunta **2**

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{5x^2 + 2x - 2}$$

Selecione uma opção:

☒ a. $\frac{2}{5}$
Passo 1: Identificar os termos de maior grau no numerador e denominador:No numerador: $2x^2$ No denominador: $5x^2$ **Passo 2:** Dividir todos os termos por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{5x^2 + 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

Passo 3: Aplicar o limite:À medida que $x \rightarrow +\infty$, os termos com $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendem a zero:

$$\frac{2-0+0}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

☐ b. $\frac{5}{7}$

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $\frac{2}{5}$

Pergunta 3

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1}$$

Selecione uma opção:

- ☒ a. 2  **Passo 1:** Verificar se é possível substituir diretamente:

Substituindo $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1^8 - 1}{1^4 - 1} = \frac{0}{0}$$

Forma indeterminada, então precisamos simplificar.

Passo 2: Simplificar:

Sabemos que:

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$$

Substituindo:

$$\frac{(x^4 - 1)(x^4 + 1)}{x^4 - 1} = x^4 + 1$$

Cancelamos $x^4 - 1$ (válido para $x \neq 1$).**Passo 3:** Substituir $x = 1$ na expressão simplificada:

$$x^4 + 1 = 1^4 + 1 = 2$$

- ☐ b. Indeterminado

A sua resposta está correta.

Resposta correta: 2

Pergunta 4

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(3x) \cos(5x) e^{-x}$$

Selecione uma opção:

- ☒ a. 0  **Passo 1:** Analisar cada parte da expressão:
 $\sin(3x)$ e $\cos(5x)$ são funções oscilatórias entre -1 e 1 (i.e. o seu módulo ≤ 1).
 e^{-x} tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$.
Passo 2: Como o produto de funções oscilatórias limitadas com uma função que tende a zero resulta em uma função que também tende a zero:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(3x) \cos(5x) e^{-x} = 0$

- ☐ b. Indeterminado

A sua resposta está correta.

Resposta correta: 0

Pergunta 5

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}$$

Selecione uma opção:

☐ a. O limite é indefinido, pois resulta em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

☒ b. $\frac{1}{3}$  **Passo 1:** Ao substituir diretamente $x = 1$, obtemos:

Numerador: $x - 1 = 0$

Denominador: $x^3 + x^2 - 2x = 1 + 1 - 2 = 0$

Passo 2: Temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, o que indica que devemos tentar simplificar a expressão. Como o denominador anula-se para $x = 1$ sabemos que tem como factor $(x - 1)$:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x - 1)(x + 2)$$

Substituindo na fração:

$$\frac{x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)} \quad (\text{para } x \neq 1)$$

Passo 3: Agora, podemos calcular o limite substituindo $x = 1$:

$$\frac{1}{1(1+2)} = \frac{1}{3}$$

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $\frac{1}{3}$

Pergunta 6

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(3x)}{x^3 + 3x}$$

Selecione uma opção:

☒ a. 0  Para resolver esse limite, observe o comportamento das partes da fração:

- O numerador é $\sin(3x)$. Como $\sin(3x)$ oscila entre -1 e 1, temos:

$$x - 1 \leq x + \sin(3x) \leq x + 1$$

Ou seja, o numerador cresce aproximadamente como x para $x \rightarrow +\infty$.

- O denominador é $x^3 + 3x$, que cresce como x^3 para $x \rightarrow +\infty$.

Portanto, o crescimento do denominador é muito mais rápido que o do numerador. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(3x)}{x^3 + 3x} = 0$$

☐ b. 1

A sua resposta está correta.

Resposta correta: 0

Pergunta 7

Correta

Nota: 1,00 em 1,00

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x} \sin(x)}{3x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$$

Selecione uma opção:

- ☐ a. Infinito, pois $\sqrt{x} \sin(x)$ cresce indefinidamente.
- ☒ b. $\frac{1}{3}$  À medida que $x \rightarrow +\infty$:
- O termo $\sqrt{x} \sin(x)$ oscila entre $-\sqrt{x}$ e $\sqrt{x}$, mas cresce mais lentamente do que x , pois $\sqrt{x} = x^{1/2}$.
 - Assim, o numerador $x + \sqrt{x} \sin(x)$ cresce como x , já que $\sqrt{x} \sin(x)$ é desprezível em comparação.
 - O denominador $3x + e^{-x}$ também cresce como $3x$, pois $e^{-x} \rightarrow 0$ rapidamente.

Portanto, o comportamento dominante da fração é:

$$\frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Neste tipo de limite um outro método consiste em determinar a maior potência de x que aparece e depois dividir numerador e denominador por essa potência de x e depois calcular o limite.

A sua resposta está correta.

Resposta correta: $\frac{1}{3}$