



# Investigação Operacional | 21076

## Período de Realização

Decorre dia 23 de Junho de 2021, das 15:00 às 16:30

## Enunciado

**Justifique** todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1 (4 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = X + 3Y$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} X - 3Y \leq 3 \\ -2X + Y \leq 2 \\ -3X + 4Y \leq 12 \\ 3X + Y \leq 9 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos (determinação de todas as restrições, intersecção das restrições, curvas de nível da função objectivo, sentido de crescimento da função objectivo, determinação de ponto(s) óptimo(s),...).

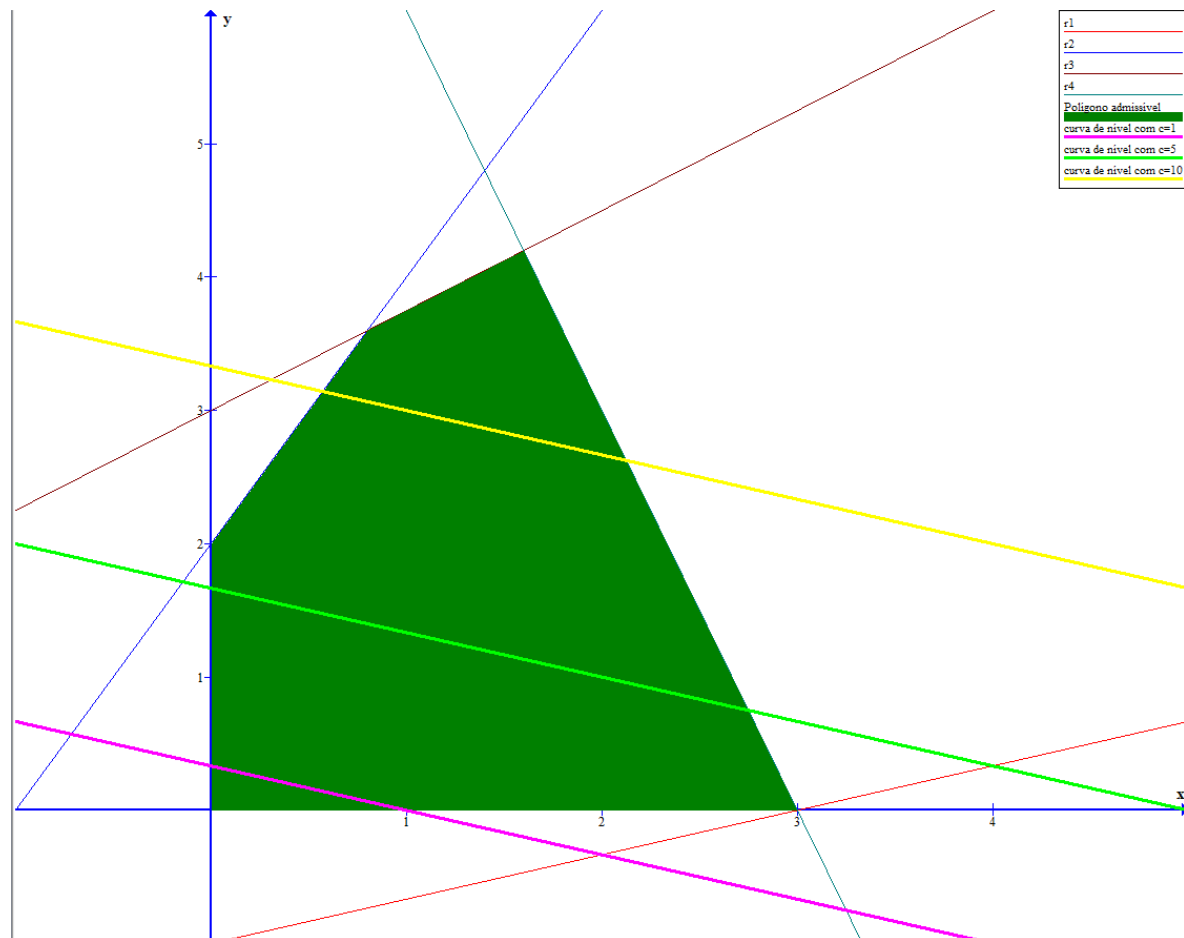
### Resolução:

O primeiro passo para resolver o problema pelo método gráfico é desenhar o polígono admissível, tendo em conta as restrições. Tendo em conta que  $X, Y \geq 0$ , o polígono admissível encontra-se no primeiro quadrante.

A recta correspondente à primeira restrição é  $X - 3Y = 3 \Leftrightarrow Y = -\frac{1}{3}X - 1$ , ou seja é a recta de declive  $-\frac{1}{3}$  que intersecta o eixo vertical no ponto  $(0, -1)$ . Como a primeira restrição é equivalente a  $Y \geq -\frac{1}{3}X - 1$ , estamos interessados no semiplano acima da recta.

A recta correspondente à segunda restrição é dada pela equação  $-2X + Y = 2 \Leftrightarrow Y = 2X + 2$ , ou seja, é a recta de declive 2 que cruza o eixo vertical no ponto  $(0, 2)$ . Como a segunda restrição é equivalente a

$Y \leq 2X + 2$ , estamos interessados no semiplano abaixo da recta.  
 A recta correspondente à terceira restrição é dada pela equação  $-3X + 4Y = 12 \Leftrightarrow Y = \frac{3}{4}X + 3$ , ou seja, é a recta de declive  $\frac{3}{4}$  que cruza o eixo vertical no ponto  $(0, 3)$ . Como a segunda restrição é equivalente a  $Y \leq \frac{3}{4}X + 3$ , estamos interessados no semiplano abaixo da recta.  
 A recta correspondente à quarta restrição é dada pela equação  $3X + Y = 9 \Leftrightarrow Y = -3X + 9$ , ou seja, é a recta de declive  $-3$  que cruza o eixo vertical no ponto  $(0, 9)$ . Como a segunda restrição é equivalente a  $Y \leq -3X + 9$ , estamos interessados no semiplano abaixo da recta.  
 Assim, o polígono admissível é a região do primeiro quadrante que resulta da intersecção do semiplano acima da recta  $Y = -\frac{1}{3}X - 1$  com o semiplano abaixo da recta  $-2X + Y = 2$ , com o semiplano abaixo da recta  $-3X + 4Y = 12$  e com o semiplano abaixo da recta  $3X + Y = 9$ .



Para descobrir o ponto(s) do polígono admissível onde  $F$  assume o valor máximo, temos de perceber quais são as curvas de nível de  $F$  e em que sentido cresce.

Curvas de nível de  $F$  (com  $c \in \mathbb{R}$  constante):

$$F(X, Y) = c \Leftrightarrow X + 3Y = c \Leftrightarrow Y = -\frac{X}{3} + \frac{c}{3}$$

Assim, as rectas de nível da função  $F$  são as rectas de declive  $-1/3$ . Pela expressão da função  $F$ , à medida que o valor de  $Y$  aumenta, sai que o valor de  $F$  aumenta. Assim, no gráfico seguinte, representa-se a violeta, verde e amarelo três rectas de nível de  $F$ , assim como o sentido de crescimento.

Assim, pelo sentido de crescimento da função  $F$ , percebe-se facilmente que o ponto do polígono em que a função  $F$  assume o valor mais elevado é o ponto na intersecção das rectas correspondentes às restrições 3 e 4.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -3X + 4Y = 12 \\ 3X + Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X = 4Y - 12 \\ 4Y - 12 + Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X = 4Y - 12 \\ 5Y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} X = \frac{4Y - 12}{3} \\ Y = \frac{21}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{8}{5} \\ Y = \frac{21}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, o ponto óptimo é o ponto  $(\frac{8}{5}, \frac{21}{5})$ , correspondente a  $X^* = \frac{8}{5}$  e  $Y^* = \frac{21}{5}$  e em que o valor máximo de  $F$  é  $F^* = X^* + 3Y^* = \frac{71}{5}$ .

- b) Utilize o método do simplex para resolver o problema. Justifique cuidadosamente todos os cálculos.

Argumente, justificando qual dos métodos (entre o método gráfico ou o método do simplex escolhido) usaria para resolver um problema de programação linear semelhante com mais 4 restrições.

**Resolução:**

Problema na forma standard:

$$\max F = X + 2Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 + 0F_4$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} X - 3Y + F_1 = 3 \\ -2X + Y + F_2 = 2 \\ -3X + 4Y + F_3 = 12 \\ 3X + Y + F_4 = 9 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, F_4 \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema não tem desigualdades  $\geq$ , na forma standard, não é acrescentar variáveis artificiais. Assim, o problema vai ser resolvido pelo do simplex primal.

operação	base	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	TI	$\Delta_i$
	F <sub>1</sub>	1	-3	1	0	0	0	3	—
	F <sub>2</sub>	-2	1	0	1	0	0	2	2 ←
	F <sub>3</sub>	-3	4	0	0	1	0	12	3
	F <sub>4</sub>	3	1	0	0	0	1	9	9
	F	-1	-3	0	0	0	0		
			↑						
$l_1 + 3l_2$	F <sub>1</sub>	-5	0	1	3	0	0	9	—
	Y	-2	1	0	1	0	0	2	—
$l_3 - 4l_2$	F <sub>3</sub>	5	0	0	-4	1	0	4	$\frac{4}{5}$ ←
$l_4 - l_2$	F <sub>4</sub>	5	0	0	-1	0	1	7	$\frac{7}{5}$
$l_5 + 3l_2$	F	-7	0	0	3	0	0	6	
			↑						
$l_1 + l_3$	F <sub>1</sub>	0	0	1	-1	1	0	13	—
$l_2 + \frac{2}{5}l_3$	Y	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	—
$\frac{1}{5}l_3$	X	1	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	—
$l_4 - l_3$	F <sub>4</sub>	0	0	0	3	-1	1	3	1 ←
$l_5 + \frac{7}{5}l_3$	F	0	0	0	$-\frac{13}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{58}{5}$	
					↑				
$l_1 + \frac{1}{4}l_4$	F <sub>1</sub>	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	14	
$l_2 + \frac{1}{5}l_4$	Y	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{21}{5}$	
$l_3 + \frac{4}{15}l_4$	X	1	0	0	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{5}$	
$\frac{1}{3}l_4$	F <sub>2</sub>	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	

Em cada passo do método, escolhe-se para entrar na base a variável que apresenta o valor negativo mais baixo na linha de F. Sai da base a variável que apresenta o valor  $\Delta_i$  mais baixo.

Como na linha da função  $F$  já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de  $F$ ,  $F^* = \frac{71}{5}$ , quando  $X^* = \frac{8}{5}$ ,  $Y^* = \frac{21}{5}$ ,  $F_1^* = 4$  e  $F_2^* = 1$ .

Note-se que o valor na linha de  $F$  correspondente às variáveis de folga  $F_2$  e  $F_3$  (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução ótima é única.

Se tivéssemos de resolver um problema semelhante com mais 4 restrições, poderíamos optar por qualquer um dos métodos (gráfico ou simplex). No entanto o método do simplex é mais metódico e mais fácil de implementar computacionalmente, pelo que seria a melhor opção. No método gráfico com muitas restrições, pode ficar difícil de perceber qual a região admissível e onde se encontra o ponto ótimo.

**2** (3 val.) Uma clínica realiza um determinado tipo de exame que, pela sua especificidade, apenas é realizado por um único médico da clínica. A chegada dos utentes segue uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de chegada de 10 pessoas por hora. Os pacientes são atendidos de acordo com a disciplina FIFO e estão dispostos a esperar o necessário para serem atendidos. A estimativa do tempo gasto por exame seja exponencialmente distribuído, com um tempo médio de 4 minutos.

- a) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado, justificando detalhadamente a caracterização.

**Resolução:**

Trata-se de um sistema  $M/M/1$  (População= $\infty$ , Fila máxima= $\infty$ ) porque tanto o processo de chegada de utentes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1 porque tem apenas um médico a realizar o exame.

Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas  $\lambda = \frac{1}{6}$  utentes por minuto (10 utentes por hora).

Duração do serviço com distribuição Exponencial com taxa de atendimento de  $\mu = \frac{1}{4}$  utentes por minuto (4 minutos por exame).

População de chamadas ilimitada.

Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

- b) Determine a probabilidade de se formar uma fila de espera.

**Resolução:**

Para termos fila de espera, tem de existir pelo menos 2 utentes na clínica, um a ser atendido e o outro em fila de espera. Assim,

$$P(\text{utentes} \geq 2) = 1 - P(\text{utentes} < 2) = 1 - (P_0 + P_1)$$

Sendo  $\lambda = \frac{1}{6}$  e  $\mu = \frac{1}{4}$ , sai que a taxa de pressão é dada por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \quad \checkmark$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Assim,

$$P(\text{utentes} \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \sim 44,4\%$$

c) Determine o tamanho médio da fila de espera.

**Resolução:**

O tamanho médio na fila de espera é dado por

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \text{ utentes.}$$

**3** (2 val.)

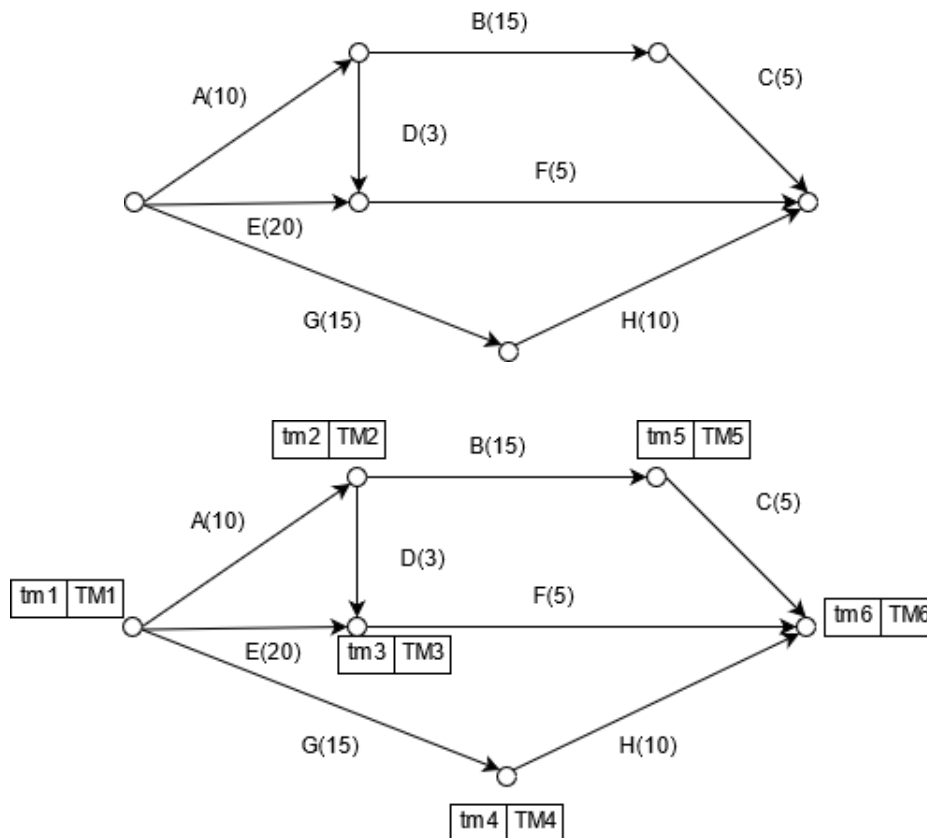
Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte.

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	—	10
B	A	15
C	B	5
D	A	3
E	—	20
F	D, E	5
G	—	15
H	G	10

a) Determine a duração total do empreendimento.

Para determinar a duração total do projecto, desenhamos a rede.

Existem 3 actividades sem precedências, portanto sabemos que essas saem do nó inicial: A, E e G. As actividades que vão ter ao nó final são aquelas que não são precedência de nenhuma outra actividade: C, F e H.



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = \max\{tm_2 + 3, tm_1 + 20\} = \max\{13, 20\} = 20$
$tm_4 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_5 = tm_2 + 15 = 25$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_4 + 10, tm_3 + 5\} = \max\{30, 25, 25\} = 30$

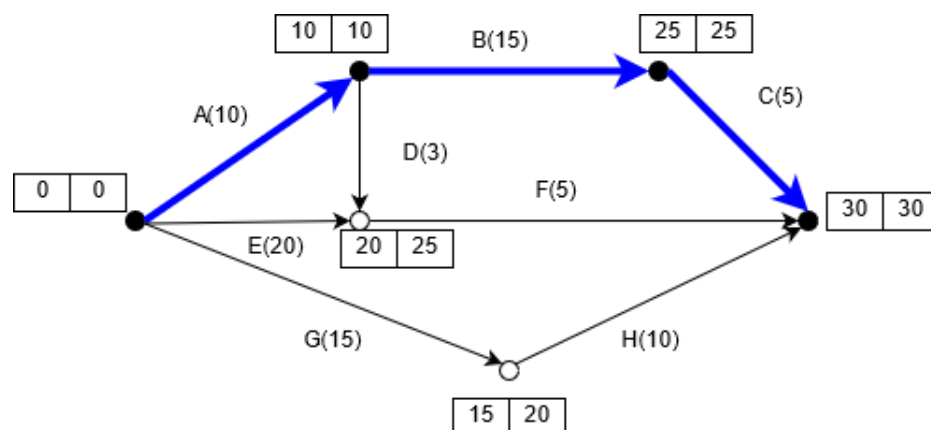
Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_8 = 30$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_4 = TM_6 - 10 = 20$
$TM_3 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 15, TM_3 - 3\} = \min\{10, 22\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_3 - 20, TM_4 - 15\} = \min\{0, 5, 5\} = 0$

Conclui-se assim que a duração total do projecto é 30 unidades de tempo.

b) Determine o caminho crítico do empreendimento.

**Resolução:**

Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



Marcou-se a preto os nós críticos, em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 4 nós críticos: 1, 2, 5 e 6. As actividades que unem estes nós são candidatas a actividades críticas. Para serem actividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da actividade (para não ahver folgas).

Actividade	$tm(i+1) - tm(i)$	Duração	Conclusão
A	$tm_2 - tm_1 = 10$	10	actividade crítica
B	$tm_5 - tm_2 = 25 - 10 = 15$	15	actividade crítica
C	$tm_6 - tm_5 = 30 - 25 = 5$	5	actividade crítica



Conclui-se que todas as actividades são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C.

4 (3 val.) Todas as semanas a brigada de trânsito escolhe entre 2 zonas, A e B, para ficar a fiscalizar o trânsito. A escolha da zona é feita atirando uma moeda ao ar. Se sair cara, ficam na zona A e se sair coroa ficam na zona B. O número de infracções registadas por semana, quer na zona A, quer na zona B, é dado pela variável aleatória  $X$  com a seguinte função densidade de probabilidade.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 50 \\ 0,03, & 0 \leq 50 \leq x < a \\ 0,01, & a \leq x < 110 \\ 0, & x \geq 110 \end{cases}$$

a) Determine o valor do parâmetro  $a$ .

**Resolução:**

Para calcular o valor de  $a$ , sabemos que o integral em  $\mathbb{R}$  da função densidade de probabilidade é igual a 1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{50} f_X(x) dx + \int_{50}^a f_X(x) dx + \int_a^{110} f_X(x) dx + \int_{110}^{+\infty} f_X(x) dx &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{50} 0 dx + \int_{50}^a 0,03 dx + \int_a^{110} 0,01 dx + \int_{110}^{+\infty} 0 dx &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 + [0,03]_{50}^a + [0,01]_a^{110} + 0 &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,03a - 1,5 + 1,1 - 0,01a &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,02a = 1,4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a = 70 \end{aligned}$$

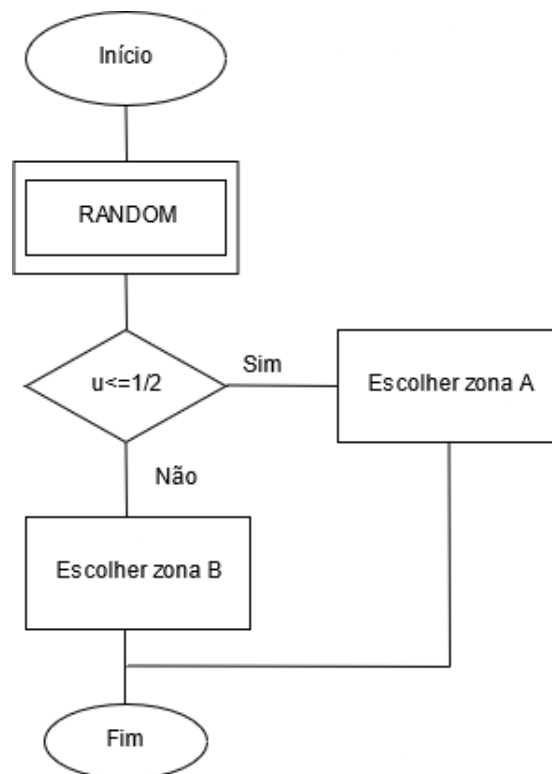
b) Elabore uma rotina que determine a zona escolhida para ser fiscalizada em cada semana. Apresente o fluxograma associado.

**Resolução:**

Sabendo que a escolha de zona é feita atirando uma moeda (equilibrada) ao ar e que  $P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$ , construímos a seguinte rotina:

1. Gerar um  $NPA[0,1]$ ,  $u$
2. Se  $u \leq \frac{1}{2}$ , então escolhe-se cara (zona A). Caso contrário, escolhe-se coroa (zona B).

Temos o seguinte fluxograma.



- c) Recorrendo ao Método da Rejeição, elabore a rotina que gera o número de infracções registada em cada semana, ou seja, que permite simular o número de infracções semanais. Apresente o fluxograma associado.

**Resolução:**

Para usar o Método da Rejeição, seguimos os seguintes passos.

1. Gera-se um  $NPA[0, 1] : U_1$
2. Para o intervalo  $[a, b] = [50, 110]$ , constrói-se a variável

$$X_1 = a + (b - a)U_1 = 50 + (110 - 50)U_1 = 50 + 60U_1$$

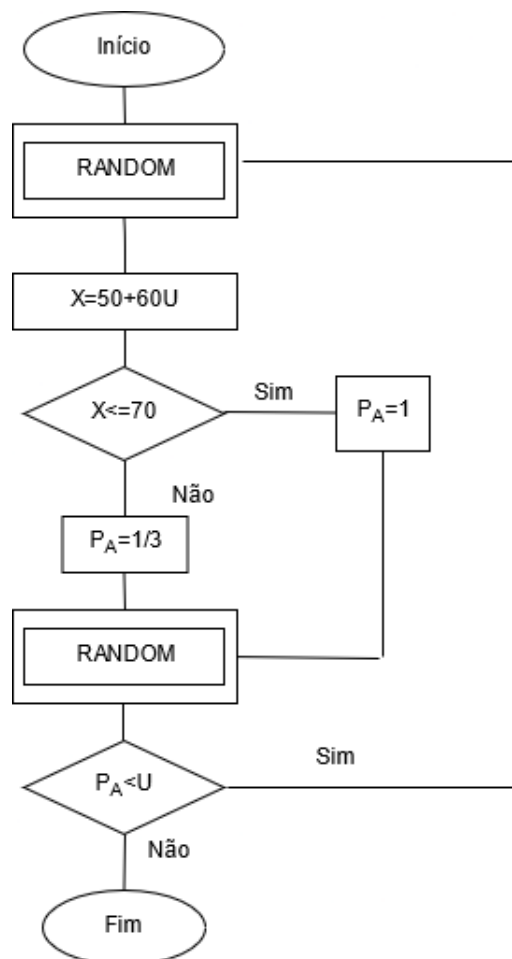
Note-se que  $X_1 \in [50, 110]$  porque  $U_1 \in [0, 1]$ .

3. Tendo em conta que a moda está no intervalo  $[50, 70]$ , sai que  $f_X(mod) = 0,03$ . Assim

$$P_A = \frac{f_X(X_1)}{f_X(mod)} = \begin{cases} 1, & 50 \leq X_1 < 70 \\ \frac{1}{3}, & 70 \leq X_1 \leq 110 \end{cases}$$

4. Gera-se um  $NPA[0, 1] : U_2$
5. Se  $P_A < U_2$  rejeita-se  $X_1$  e retorna-se ao passo 1. Caso contrário, aceita-se  $X_1$  como  $NPAX$ .

Temos o seguinte fluxograma.



**FIM**