Potências, Exponenciais e Logaritmos

1 de Dezembro de 2011

1 Potências

Fórmulas das potências

$$\begin{aligned}
a^m \times a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \text{ (para } a \neq 0) \\
(a^m)^n &= a^{m \times n} \\
(ab)^n &= a^n b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \text{ (para } b \neq 0) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \text{ (para } a \neq 0) \\
a^{\frac{n}{m}} &= \sqrt[m]{a^n}.
\end{aligned}$$

Repare-se que se $a \neq 0$ temos $a^0 = 1$. De facto,

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \times a^{-1} = \frac{a}{a} = 1.$$

Exemplo 1 *Calcule*

1. $-2^4 = ?$

   R $-2^4 = (-1) \times 2^4 = (-1) \times 16 = -16.$

2. $(-2)^4 = ?$

   R $(-2)^4 = (-1)^4 \times 2^4 = 1 \times 16 = 16.$

3. $(-2)^5 = ?$

   R $(-2)^5 = (-1)^5 \times 2^5 = (-1) \times 32 = -32.$

4. $-(-2)^5 = ?$

   R $-(-2)^5 = (-1) \times (-2)^5 = (-1) \times (-32) = 32.$

Exercicio 2 *Calcule*

1. $-(-5)^3$

2. $(-2)^3$

3. $(-1)^{20}$

4. $(-1)^{15}$

5. -1^6

6. $(-1)^4.$

Soluções do exercício anterior 125, -8,1,-1,1.

Exemplo 3

1. $17^3 \times 17^4 = 17^{3+4} = 17^7.$

2. $\pi^2 \times \pi^5 = \pi^{2+5} = \pi^7.$

3. $2^a \times 2^3 = 2^{a+3}.$

4. $\dfrac{7^{10}}{7^{11}} = 7^{10-11} = 7^{-1} = \dfrac{1}{7}.$

5. $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6.$

6. $(3^4)^5 = 3^{4\times 5} = 3^{20}.$

Exemplo 4

1. $(2x)^4 = 2^4x^4 = 16x^4$.
2. $\left(\dfrac{2a}{3}\right)^3 = \dfrac{8a^3}{27}$.
3. $(-5x)^{-2} = \dfrac{1}{(-5x)^2} = \dfrac{1}{25x^2}$.
4. $(4a^2)^{-2} = \dfrac{1}{(4a^2)^2} = \dfrac{1}{16(a^2)^2} = \dfrac{1}{16a^4}$.

Exemplo 5

1. $4x^2 \times 6x^3 = (4 \times 6)(x^2 \times x^3) = 24x^{2+3} = 24x^5$.
2. $\dfrac{16b^7}{4b^4} = 4b^{7-4} = 4b^3$.
3. $(2b^{-3})^{-1} = \dfrac{1}{2b^{-3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{b^3}} = \dfrac{b^3}{2}$.

Exemplo 6

Elimine o traço de fração nos seguintes exemplos.

1. $\dfrac{x^2+4x+8}{x} = \dfrac{x^2}{x} + \dfrac{4x}{x} + \dfrac{8}{x} = x + 4 + 8x^{-1}$.
2. $\dfrac{5x^4-3x^2+x+6}{x^2} = \dfrac{5x^4}{x^2} - \dfrac{3x^2}{x^2} + \dfrac{x}{x^2} + \dfrac{6}{x^2} = 5x^2 - 3 + x^{-1} + 6x^{-2}$.

Exemplo 7

1. $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
2. $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$.
3. $x^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$.
4.
$$\begin{aligned} \sqrt{x}\sqrt[3]{x^2} &= x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} \\ &= x^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} \\ &= x^{\frac{7}{6}} \\ &= \sqrt[6]{x^7}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{27x^2}\sqrt[6]{64x^5} &= 27^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} \times 64^{\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{6}} \\
&= 3x^{\frac{2}{3}} \times 2x^{\frac{5}{6}} \textit{(porque } 3^3 = 27 \textit{ e } 2^6 = 64\textit{)} \\
&= 6x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{5}{6}} \\
&= 6x^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} \\
&= 6x^{\frac{4}{6}+\frac{5}{6}} \\
&= 6x^{\frac{9}{6}} \\
&= 6x^{\frac{3}{2}} \\
&= 6\sqrt[2]{x^3}.
\end{aligned}$$

2 Equações

O nosso objetivo é conseguir resolver equações do tipo: *determine x sabendo que*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 32.$$

A única regra que vamos usar para resolver esta equações com potências é a seguinte: se $1 \neq a \neq 0$, então

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y.$$

Exemplo 8 1. *Se $3^x = 27$, determine x.*

R *Vamos tentar escrever 27 como potência de 3. Claramente, $27 = 3^3$ e portanto*

$$3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3,$$

e está resolvida a equação.

2. *Se $3^{x+2} = \dfrac{1}{27}$, determine x.*

R *Claramente, $1/27 = 1/3^3 = 3^{-3}$ e portanto*

$$3^{x+2} = 3^{-3} \Rightarrow x + 2 = -3 \Rightarrow x = -5,$$

e está resolvida a equação.

3. *Se $2^{x+3} = \dfrac{1}{64}$, determine x.*

R *Claramente, $64 = 8 \times 8 = 2^3 \times 2^3 = 2^6$. Portanto,*

$$2^{x+3} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6} \Rightarrow x + 3 = -6 \Rightarrow x = -9.$$

Fácil! ≪Não será possível apresentar algum exercício mais difícil?≫

4. *Se $2^{1-2x} = \dfrac{1}{2}$, determine x.*

R

$$2^{1-2x} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow 1 - 2x = -1 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1.$$

Esta até se fazia de cabeça...

5. *Se* $4^x = 8$, *determine* x.

   R

   $$4^x = 8 \Rightarrow (2^2)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2.$$

   Cada vez mais simples!

6. *Se* $9^{x-2} = \dfrac{1}{3}$, *determine* x.

   R

   $$9^{x-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow (3^2)^{x-2} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{2x-4} = 3^{-1} \Rightarrow 2x - 4 = -1 \Rightarrow x = 3/2.$$

   Outra vez!

7. *Se* $4^{2x-1} = \dfrac{1}{2}$, *determine* x.

   R

   $$4^{2x-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (2^2)^{2x-1} = 2^{-1} \Rightarrow 2^{4x-2} = 2^{-1} \Rightarrow 4x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1/4.$$

   Não há nada mais complicado?

8. *Se* $\left(\dfrac{1}{7}\right)^x = 49$, *determine* x.

   $$\left(\frac{1}{7}\right)^x = 49 = 7^2 \Rightarrow 7^{-x} = 7^2 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2.$$

9. *Se* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} = 32$, *determine* x.

   $$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 32 = 2^5 \Rightarrow 2^{-x-1} = 2^5 \Rightarrow -x - 1 = 5 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6.$$

10. *Se* $\sqrt[x]{2} = \dfrac{1}{32}$, *determine* x.

    R

    $$\sqrt[x]{2} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-5} \Rightarrow \frac{1}{x} = -5 \Rightarrow x = \frac{-1}{5}.$$

    Fácil!

11. *Se* $\sqrt[2x+1]{25} = 5^{9x}$, *determine* x.

    R

    $$\sqrt[2x+1]{25} = 5^{9x} \Rightarrow 5^{\frac{2}{2x+1}} = 5^{9x} \Rightarrow \frac{2}{2x+1} = 9x \Rightarrow 2 = 9x(2x+1) \Rightarrow 2 = 18x^2 + 9x.$$

    Daqui resulta

    $$2 = 18x^2 + 9x \Rightarrow 18x^2 + 9x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \times 18 \times 2}}{2 \times 18}.$$

Fazendo as contas temos

$$x = \frac{-9 \pm 15}{36} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = -\frac{2}{3}.$$

Já deu mais luta, mas continua fácil. Não há por aí algo mais complexo?

12. *Se* $10^x = 49$*, determine* x*.*

R *Esta parece ainda mais fácil que as anteriores:*

$$10^x = 49 \Rightarrow 10^x = 7^2.$$

Agora temos de colocar 7^2 *como potência de base* 10*. Mas como? Como? Parece que vamos ter de esperar por uma matéria nova...*

3 Logaritmos

Há muitos séculos, num reino distante, vivia um professor de matemática que atormentava todos os seus alunos; cansados de tanta matemática, os alunos conseguiram exilar o professor para um atol deserto no Atlântico Sul, e apenas lhe permitiram levar um livro (que evidentemente tinha de ser de matemática). O livro, pensou o professor, teria de ser sobre uma matéria extremamente poderosa (para ele se dedicar a coisas importantes) e num tema inesgotável (porque não lhe faltava tempo). Claramente, o tema da matemática que melhor se adapta a estes requisitos (de inesgotabilidade aliada à máxima importância e utilidade) são os **logaritmos***!!*

Recordemos o nosso problema:

Se $10^x = 49$*, determine* x*.*

Por palavras: *qual é o* x *tal que* 10^x *dá* 49*?* À falta de melhor resposta, usamos um truque matemático que funciona sempre: vamos *inventar* um nome para este x. Dizemos que o x *tal que* 10^x *dá* 49 *é o* $\log 49$. Por outras palavras, quando virem $\log 49$ já sabem que este é o número x tal que $10^x = 49$. Até aqui nada há a perceber: é só uma definição, uma notação.

Analogamente, qual a solução da equação $2^x = 5$? Não podemos dizer que é $\log 5$ porque esta é entendida como a solução de $10^x = 5$. Por isso acrescenta-se a base ao logaritmo ficando $\log_2 5$. Nestes termos, a solução da equação $2^x = 5$ é $x = \log_2 5$. Evidentemente, $\log_{10} 49 = \log 49$ porque se convencionou que quando o logaritmo não tem base, a base é 10.

> A solução da equação $a^x = b$ é
>
> $\log_a b$.
>
> A solução da equação $10^x = 49$ é
>
> $\log 49$.
>
> A solução da equação $2^x = 5$ é
>
> $\log_2 5$.

Há um processo *mecânico* de saber o que é o $\log_a\ b$ (ou seja, um processo para fazer desaparecer o log):

> 1. fazemos $x = \log_a\ b$ (saber o que é o $\log_a b$ é igual a saber o que é x, dado que $x = \log_a b$;-);
> 2. fazemos o a migrar para base do x, enquanto o log desaparece:
>
> $$x = \log_a\ b \Rightarrow a^x = b.$$

Isto é uma técnica *matemático-Disney* (porque usa efeitos de animação), mas funciona! E não é caso único.

Repare no seguinte exemplo: *determine x tal que $x/2 + 1 = 2$.* Uma forma de resolver este problema é a pensar: *metade de um número mais 1, dá 2. Qual é o número?* De cabeça sabemos que a resposta é 2. Mas esta *técnica* de ver o resultado é muito limitada porque rapidamente perdemos a capacidade de resolver *assim* equações do tipo $-2x+3/5 = 7/6$. E por isso ninguém resolve equações a pensar no *significado* da pergunta.

As pessoas têm regras para *animar a equação* e assim mudar os símbolos de um lado para o outro:

$$x/2 + 1 = 2 \Rightarrow x/2 = 2 - 1 \Rightarrow x/2 = 1 \Rightarrow x = 2 \times 1 \Rightarrow x = 2.$$

Se tivéssemos no papel recursos para tal, os 5 passos acima seriam 5 fotogramas de um filme de animação.

Nos logaritmos é exatamente igual. Em vez de estar a pensar *no significado do logaritmo que temos à frente* devemos *acrescentar um igual e fazer trocas de um lado para o outro do igual numa movimentação matemático-Disney*.

Por exemplo, o que é $3 \times \log_2\ 5$? Já sabemos que será a solução de uma qualquer equação exponencial. Mas qual? Em vez de arriscarmos um esgotamento cerebral a tentar descobrir, aplicamos o algoritmo acima:

$$x = 3\log_2\ 5 \Rightarrow \frac{x}{3} = \log_2\ 5 \Rightarrow 2^{\frac{x}{3}} = 5.$$

Em suma: o que é $3\log_2\ 5$? É o número x tal que $2^{\frac{x}{3}} = 5$. Ou seja, $3\log_2 5$ é a solução da equação

$$2^{\frac{x}{3}} = 5.$$

Exercicio 9 *Diga de que equação são os seguintes logaritmos solução:*

1. $\log_2 3$
2. $2\log_3 4$
3. $0.5\log_6 7$

Resolução

1. $x = log_2 3 \Rightarrow 2^x = 3$.
2. $x = 2\log_3 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = \log_3 4 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 4$.
3. $x = 0.5\log_6 7 \Rightarrow \frac{x}{0.5} = \log_6 7 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \log_6 7 \Rightarrow 2x = \log_6 7 \Rightarrow 6^{2x} = 7$.

Já temos uma técnica matemático-Disney para passar de $\log_a b$ para $a^x = b$. Ou seja, sabemos ir do logaritmo para a equação. Será que existe também um método matemático-Disney para ir da equação para ao logaritmo? Para responder a isto basta saber o seguinte:

$$\log_a a^c = c.$$

Em palavras *o logaritmo na base a é o inverso da exponencial na base a.* Tal como a subtração é a operação inversa da soma, tal como a divisão é a operação inversa da multiplicação, o logaritmo é a operação inversa da exponencial.
Portanto, se queremos passar da equação $a^x = b$ para uma expressão com logaritmos, como podemos fazer num método matemático-Disney?

$$a^x = b \Rightarrow \log_a(a^x) = log_a(b) \Rightarrow x = \log_a b.$$

Exercicio 10 *Passe as seguintes equações para uma expressão em termos de logaritmos (ou seja, resolva em ordem a x):*

1. $2^x = 5$
2. $3^{x^2} = 9$
3. $4^{1/x} = 1024$

Resolução

1. $2^x = 5 \Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5 \Rightarrow x = \log_2 5.$
2. $3^{x^2} = 9 \Rightarrow \log_3 3^{x^2} = \log_3 9 \Rightarrow x^2 = \log_3 3^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$
3. $4^{1/x} = 1024 \Rightarrow \log_4 4^{1/x} = \log_4 1024 \Rightarrow 1/x = \log_4 4^5 \Rightarrow 1/x = 5 \Rightarrow x = 1/5.$

Já sabemos que $a+b-b=a$; já sabemos que $(a\times b)/b=a$ (se $b\neq 0$); já sabemos que

$$\log_a a^c = c.$$

Para fechar o ciclo basta saber quanto dá

$$a^{\log_a b} = ?$$

Como $x=\log_a b$ é a solução de $a^x=b$, sai (por definição) que

$$a^{\log_a b} = b$$

Assim,

$$\log_{\mathbf{a}} \mathbf{a}^{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{a}^{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{b}} = \mathbf{b}.$$

Ficamos com a lista dos *cortes* em logaritmos.

4 Problemas Reais

OK! Mas tudo isto são meras definições. O que se ganhou com isto?

Para responder a esta pergunta, vamos voltar ao caso das equações lineares. *Determine x tal que $x/7 = 8$.* Também neste caso poderíamos dizer que a solução é *chamada, por definição,* $7 * 8$. E ganhamos alguma coisa com isso? Ganhamos se depois existir uma tabela que nos dê o valor de $7 * 8$. Essa tabela existe, todos nós tivemos de a aprender de cor e salteado na escola primária (ou primeiro ciclo conforme o gosto de cada um). Nessa tabela sabemos que está escrito $7 * 8 = 56$. Consequentemente dizemos que a solução da equação $x/7 = 8$ é $x = 56$.

Da mesma forma, dada a equação $10^x = 49$, já sabemos que a solução é $x = \log 49$. E agora: podemos calcular x? Sim, se tivermos à mão uma tabela de logaritmos, ou se tivermos uma calculadora. Concretamente, o Google tem a resposta para esta questão. Se colocar no Google

log 49 <Enter>

aparece o resultado: 1.69019608.

Já agora meta no Google log 10. Qual é o resultado? Consegue perceber porquê?

Vamos lá usar a nossa técnica matemático-Disney:

$$x = \log 10 = \log_{10} 10 \Rightarrow 10^x = 10 \Rightarrow x = 1.$$

O Google estava certo!

Exercicio 11 *Resolva com ajuda de Google as seguintes equações:*

1. $10^x = 1$ (concorda mesmo com a resposta do Google?)
2. $10^x = 2$
3. $10^x = 3$
4. $10^x = 4$
5. $10^x = 5$
6. $10^x = 6$
7. $10^x = 7$
8. $10^x = 8$
9. $10^x = 9$
10. $10^x = 9.9$
11. $10^x = 9.999999999$ (concorda com a resposta do Google? ;-)
12. $10^{2x} = 1$
13. $10^{-x-1} = 4$
14. $10^{\frac{2x}{3}} = 5$
15. $10^{\frac{2x}{3}} = 6$
16. $10^{\frac{2}{x^2}} = 7$

Respostas

- $10^x = 1 \Rightarrow x = \log 1 = 0$ (segundo o Google)
- $10^x = 5 \Rightarrow x = \log 5 = 0.698970004$ (segundo o Google)
- $10^x = 9 \Rightarrow x = \log 9 = 0.954242509$ (segundo o Google)
- $10^x = 9.9 \Rightarrow x = \log 9.9 = 0.995635195$ (segundo o Google)
- $10^x = 9.999999999 \Rightarrow x = \log 9.999999999 = 1$ (segundo o Google; claro que isto é uma aproximação. Com exceção do primeiro, todos os valores do Google são aproximações. Há calculadoras mais precisas, mas em termos de logaritmos a precisão total, em geral, é impossível).
- $10^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = \log 1 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $10^{-x-1} = 4 \Rightarrow -x - 1 = \log 4 \Rightarrow -x = 1 + \log 4 \Rightarrow x = -1.602059991.$
- $10^{\frac{2x}{3}} = 5 \Rightarrow \frac{2x}{3} = \log 5 \Rightarrow 2x = 3\log 5 \Rightarrow 2x = 2.09691001 \Rightarrow x = 1.04845501.$
- $10^{\frac{2}{x^2}} = 7 \Rightarrow \frac{2}{x^2} = \log 7 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{\log 7} \Rightarrow x = \pm 1.5383723$ (segundo o Google ;-)

Exercicio 12 *Resolva as seguintes equações com ajuda de*

`http://web2.0calc.com/`

1. $2^x = 1$
2. $2^x = 2$
3. $3^x = 4$
4. $4^x = 5$
5. $5^x = 7$
6. $7^x = 1977326743$
7. $2^{2x} = 2$
8. $3^{-x-1} = 4$
9. $4^{\frac{2x}{3}} = 5$
10. $5^{\frac{2x}{3}} = 6$
11. $6^{\frac{2}{x^2}} = 7$

Respostas

- $2^x = 1 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$
- $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$
- $3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4 = 1.2618595071429$
- $2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$
- $4^{\frac{2x}{3}} = 5 \Rightarrow \frac{2x}{3} = \log_4 5 \Rightarrow 2x = 3\log_4 5 \Rightarrow x = \frac{3\log_4 5}{2} = 1.74144607116555$

5 Regras dos Logaritmos

O que torna os logaritmos especialmente poderosos (por razões que não vamos aprender neste curso) são os seguintes factos: para $a > 0$, $a \neq 1$ e $x, y > 0$ temos

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y. \\ \log_a(x/y) &= \log_a x - \log_a y. \\ \log_a x^b &= b \log_a x. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar uma das identidades usando as outras duas. Por exemplo, vamos provar que

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y.$$

$$\begin{aligned} \log_a(x/y) &= \log_a xy^{-1} \\ &= \log_a x + \log_a y^{-1} \\ &= \log_a x + (-1) \log_a y \\ &= \log_a x - \log_a y. \end{aligned}$$

E está demonstrada a identidade. Para demonstrar qualquer uma das outras, usam-se exponenciais. Por exemplo

$$\begin{aligned} \log_a x^b = b \log_a x &\Leftrightarrow a^{\log_a x^b} = a^{b \log_a x} = (a^{\log_a x})^b \\ &\Leftrightarrow x^b = x^b. \end{aligned}$$

Como a última identidade é verdadeira, a primeira também é. Analogamente se provaria a identidade restante.

No site seguinte existem exercícios simples com correção automática:

`http://webmath.amherst.edu/qcenter/logarithms/index.html`

Exemplo 13

$$\log \frac{xy}{z} = \log(xy) - \log z = \log x + \log y - \log z.$$

Exemplo 14

$$\log_2(8x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_2(8x) = \frac{1}{3}(\log_2(8) + \log_2 x) = \frac{1}{3}(3 + \log_2 x) = 1 + \frac{\log_2 x}{3}.$$

Exemplo 15 *Determine x tal que*

$$2\log_b 5 + 0.5\log_b 9 - \log_b 3 = \log_b x.$$

R

$$2\log_b 5 + 0.5\log_b 9 - \log_b 3 = \log_b 5^2 + \log_b 9^{0.5} - \log_b 3 = \log_b 25 + \log_b 3 - \log_b 3 = \log_b 25.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\log_b 5 + 0.5\log_b 9 - \log_b 3 = \log_b x \quad &\Leftrightarrow \quad \log_b 25 = \log_b x \\ &\Leftrightarrow \quad 25 = x. \end{aligned}$$

Exemplo 16 *Resolva a seguinte equação:* $2\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = \log_b x$.

R

$$2\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = 2\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b(2\times 5) = 2\log_b(2^2) + \log_b 5 - \log_b 2 - \log_b 5.$$

Fazendo as contas temos,

$$2\log_b(2^2) + \log_b 5 - \log_b 2 - \log_b 5 = 4\log_b 2 - \log_b 2 = 3\log_b 2.$$

Portanto, $2\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = \log_b x$ implica $3\log_b 2 = \log_b x$, ou seja, $\log_b 2^3 = \log_b x$ e assim $x = 8$.

Exemplo 17 *Resolva a equação* $\log_b(x-1) + \log_b 3 = \log_b x$.

R

$$\log_b(x-1) + \log_b 3 = \log_b(3(x-1)) = \log_b(3x-3).$$

Assim, $\log_b(x-1) + \log_b 3 = \log_b x$ implica $\log_b(3x-3) = \log_b x$ e assim $3x - 3 = x$ pelo que $x = 3/2$.

Exemplo 18 *Resolva a equação* $\log_b 8 + \log_b x^2 = \log_b x$.

R

$$\log_b 8 + \log_b x^2 = \log_b(8x^2).$$

Logo, $\log_b 8 + \log_b x^2 = \log_b x$ implica $\log_b(8x^2) = \log_b x$ e bem assim $8x^2 = x$. Daqui resulta

$$8x^2 - x = 0 \Rightarrow x(8x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1/8.$$

Será que 0 pode ser uma das soluções? Vamos ver quanto é $\log_b 0$. De acordo com o nosso truque matemático-Disney, $x = \log_b 0$ implica que $b^x = 0$. Será que existem dois números positivos b e c tais que $b^c = 0$? A resposta é não, pelo que não existe $\log_b 0$ e a solução do nosso problema é apenas $x = 1/8$.

6 Inequações e domínios da função logaritmo

Exemplo 19 *Resolva a seguinte inequação* $\log_2 x \geq 3$.

Vamos tentar a solução natural: $\log_2 x \geq 3$ implica $x \geq 2^3 (= 8)$. E agora podemos testar, por exemplo, com $x = 9$:

$$\log_2 9 = 3.16 > 3.$$

A solução natural parece funcionar...

Exemplo 20 *Resolva a seguinte inequação* $\log_{0.5} x \geq 3$.

Vamos novamente tentar a solução natural: $\log_{0.5} x \geq 3$ implica $x \geq 0.5^3 = 0.125$. E agora podemos testar, por exemplo, com $x = 0.126$:

$$\log_{0.5} 0.126 = 2.98 \not\geq 3.$$

A solução natural parece não funcionar... :-(

Para resolver a inequação $\log_a x \geq b$, fazemos

$$\begin{array}{ll} x \geq a^b & \text{se } a > 1 \\ x \leq a^b & \text{se } a < 1 \end{array}$$

O caso de $a = 1$ não tem interesse pois $x = \log_1 b$ é equivalente a $1^x = b$ o que é equivalente $b = 1$.

Exercicio 21 *Resolva as seguintes inequações:*

1. $\log_2 x \geq 4$

2. $\log_3 \sqrt{x^2+1} \geq 1$

3. $\log_{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{2}{x^2+3}} \geq 0$

Resolução

1. $\log_2 x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2^4 (= 16)$.

2. $\log_3 \sqrt{x^2+1} \geq 1 \Rightarrow \log_3 (x^2+1)^{0.5} \geq 1 \Rightarrow 0.5 \log_3 (x^2+1) \geq 1 \Rightarrow \log_3 (x^2+1) \geq 2$. Daqui sai $x^2+1 \geq 3^2$ e bem assim $x^2 \geq 8$, o que dá $x \geq \sqrt{8} \vee x \leq -\sqrt{8}$.

3. $\log_{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{2}{x^2+3}} \geq 0 \Rightarrow 0.5 \log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{x^2+3} \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{x^2+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2+3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$ e agora todos já sabem resolver.

A função $\log_a x$ só está definida quando $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$.

Exemplo 22 *Determine o domínio de*

$$\log \frac{x^2}{x-1}$$

A única condição que temos de impor é

$$\frac{x^2}{x-1} > 0$$

e resolver.

Exemplo 23 *Determine o domínio de*

$$\sqrt{\log \frac{x^2}{x-1}}$$

Neste caso temos de impor duas condições:

$$\frac{x^2}{x-1} > 0 \wedge \log \frac{x^2}{x-1} \geq 0.$$

A condição $\frac{x^2}{x-1} > 0$ já a sabemos resolver. Quanto à outra condição temos

$$\log \frac{x^2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} \geq 10^0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} \geq 1,$$

e esta também já sabemos resolver.