p-Fólio

U.C. 21082

Matemática Finita

9 de junho de 2017

- INSTRUÇÕES -

- O p-fólio é composto por 7 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 4, 5, 6 e 7 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui--se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7
1.50	1.50	1.50	4.50

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **CC/BI nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Dados $0 \leq k < n$, a soma

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

não é igual a

☐ **a)** $\binom{n+1}{k+1}$

☐ **b)** $\binom{n}{k+1}$

☐ **c)** $\binom{n+1}{n-k}$

☐ **d)** $\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{i-k}$

2. Das opções seguintes indique a verdadeira:

☐ **a)** $\text{mdc}(-2,6) = -2$

☐ **b)** $\text{mdc}(-2,6) = -1$

☐ **c)** $\text{mdc}(-2,6) = 1$

☐ **d)** $\text{mdc}(-2,6) = 2$

3. Considere as duas afirmações seguintes:

(i) 10 é invertível módulo 17

(ii) 17 é invertível módulo 51

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

☐ **a)** Ambas as afirmações são verdadeiras

☐ **b)** A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

☐ **c)** A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

☐ **d)** Ambas as afirmações são falsas

Responda às questões seguintes na folha de ponto

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

4. Entre os números naturais entre 1 e 100, inclusive, indique, justificando, quantos são divisíveis por 9 ou por 5.

5. Sejam a e b dois números naturais tais que $a \equiv b \pmod 2$. Mostre que, ou a e b são ambos pares, ou a e b são ambos números ímpares.

6. **Sem utilizar o algoritmo de Euclides**, prove que a seguinte fracção é irredutível

$$\frac{72683}{14}.$$

7. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 2$.

7.1. Determine o termo geral da sucessão.

7.2. Por recurso ao **método de indução matemática** mostre que 3 é um divisor de $a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

7.3. Prove que para qualquer $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tem-se $\mathrm{mdc}(a_n, 5) = 1$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**
  $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**
  $$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**
  $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**
  $$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**
  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM