Grupo I

Questão 1.1

O erro absoluto é calculado por:

$$\epsilon = |x - \bar{x}| = |2.62945... - 2.62961|$$

Como $x < \bar{x}$, o limite superior deste erro ocorre quando x é o menor numero que pode ser aproximado de $\bar{x}$.

O menor numero que x pode ser é 2.629450, logo, temos que:

$$\epsilon_{ls} = |2,629450 - 2,62961| = |-0,00015| = 0,00015.$$

Com tres ou 4 algarismos significativos a representação é a mesma: $\epsilon_{ls} = 0,00015$, já que possui apenas 2 algarismos significativos.

Por outro lado temos o erro relativo:

$$\tau = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{|2,62945... - 2,62961|}{|2,62945...|}$$

Da mesma forma, o limite deste erro ocorre quando x é o menor numero que pode ser aproximado para $\bar{x}$, ~~que o denomindador~~ que o denomidador da fracao permanece na mesma ordem de grandeza, logo, temos que:

$$\tau_{ls} = \frac{|2,62945 - 2,62961|}{|2,62945|} = \frac{0,00015}{2,62945} = 0,000057046 1503...$$

Resposta: Utilizando arredondamento com três algarismos: $\tau_{ls} = 0,0000570$

e com 4 algarismos: $\tau_{ls} = 0,00005705$.

1,25

Questão 1.2

Calculamos as derivadas de $f(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = -2e^{-2x}$, $f''(x) = 4e^{-2x}$, $f'''(x) = -8e^{-2x}$, ...

1

Obtemos a derivada de n-ésima ordem dada por:

$$f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}.$$

Calcular o valor da função e suas derivadas no ponto $x_0 = 0$,

$$f(0) = e^{-2\times 0} = e^0 = 1$$

$$f'(0) = -2e^{-2\times 0} = -2e^0 = -2$$

$$f''(0) = 4e^{-2\times 0} = 4e^0 = 4 \quad \Rightarrow \quad f^{(n)} = (-2)^n e^{-2\times 0} = (-2)^n e^0 = (-2)^n.$$

$$f'''(0) = -8e^{-2\times 0} = -8e^0 = 8$$

Então colocamos na fórmula do polinómio de Taylor de grau n:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= 1 + (-2)\times(x-4) + \frac{4}{2!}(x-0)^2 + \frac{(-8)}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{(-2)^n}{n!}(x-0)^n$$

$$= 1 - 2x + \frac{4}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-2)^n}{n!}x^n$$

logo a resposta é: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} x^k$.

Questão 1.3

o erro associado a P_n no ponto x é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$$

como temos que:

$$f^{(n+1)}(x) = (-2)^{n+1} e^{-2x} \Rightarrow |f^{(n+1)}(x)| = 2^{n+1} e^{-2x},$$

que é uma função positiva e decrescente, logo:

$$\max_{x\in[-0,1;\,0,1]} |f^{(n+1)}(x)| = |f^{(n+1)}(-0,1)| = 2^{n+1} e^{0,2}.$$

Logo o erro máximo no intervalo é tal que:

$$\frac{2^{n+1} e^{0,2}}{(n+1)!}(0,1)^{n+1} \leq 10^{-4}.$$

Por tentativa e erro, calculamos n:

Para $n=1$:

$$\frac{2^2 e^{0,2}}{2!}(0,1)^2 = 0,024428\ldots > 10^{-4}$$

Para $n=2$:

$$\frac{2^3 e^{0,2}}{3!}(0,1)^3 = 0,001629\ldots > 10^{-4}$$

Para $n=3$:

$$\frac{2^4 e^{0,2}}{4!}(0,1)^4 = 0,000081\ldots < 10^{-4}$$

Resposta: Portanto, a menor ordem de n que satisfaz o enunciado é $n=3$.

1,5

Grupo II

Questão 2.1

Defina a função $f(x) = \cos(x) - x$, de forma que a equação é satisfeita quando $f(x)=0$. Observamos que f é contínua pois é a diferença entre 2 funções contínuas, uma trigonométrica $(\cos(x))$ e uma polinomial (x). Assim temos,

$$f(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1,$$
$$f(1) = \cos(1) - 1 \approx 0,540302 - 1 \approx -0,459698$$

como temos que $f(0) \cdot f(1) < 0$, pelo Teorema de Bolzano, concluímos que f possui uma raiz no intervalo $[0,1]$.

Por outro lado, temos que:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - 1 < 0,$$

para $x \in [0,1]$

Resposta: Assim sendo, isto garante que f é estritamente decrescente no intervalo $[0,1]$, de forma que a sua raiz no intervalo $[0,1]$, é garantidamente única.

1

Questão 2.2

O método da secante é um método interactivo para encontrar raízes de $f(x)$, aproximando a derivada por diferenças finitas, cuja fórmula: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)*(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

Aplicando o método para $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, temos:

Para $k=2$, temos que:

$f(x_0) = f(0) = 1$, $f(x_1) = f(1) = -0,459698$

obtemos x_2 por:

$$x_2 = 1 - \frac{-0,459698*(1-0)}{-0,459698-1} = 0,685073$$

aonde temos

$f(0,685073) = \cos(0,685073) - 0,685073$
$= 0,089300.$

Para $k=3$:

$f(x_1) = f(1) = -0,459698$, $f(x_2) = f(0,685073) = 0,089300$

logo obtemos x_2 por:

$$x_3 = 0,685073 - \frac{0.089300*(0.685073-1)}{0.089300-(-0,459698)}$$
$$= 0,736299.$$

aonde temos:
$f(0,736299) = \cos(0,726299) - 0,726299 = 0,004660.$

Desta forma, temos a tabela:

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1
1	1	-0,459698
2	0,685073	0,089300
3	0,736299	0,004660

Resposta: Portanto, a aproximação encontrada é $\bar{x} = 0,736299$.

2

Questão 2.3

Estimamos o erro absoluto entre 2 iteracoes

$$|E| \leq |x_3 - x_2| = |0{,}736299 - 0{,}685073| = 0{,}051226$$

Resposta: Portanto, o erro é limitado por $|E| \leq 0{,}051226$.

Grupo III

Questão 3.1

Considere I_3 a matriz identidade de ordem 3 e construa a matriz aumentada

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Aplicamos as operações elementares do método de Gauss até obter uma matriz na forma $[I_3 | B]$.

Neste ponto, temos que $B = A^{-1}$.

Resposta: Então, caso não seja possível obter uma matriz identidade no bloco da esquerda de $[A|I_3]$, então a matriz A não é invertível.

1

Questão 3.2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 : 2 \end{pmatrix}$$

3

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Desta forma calculamos:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Reposta: Portanto obtemos A*A ^(-1) = I_3 como era esperado da definicao da matriz inversa