UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21031
Elementos de Análise Infinitesimal II

27 de junho de 2019

- INSTRUÇÕES -

- A prova é composta por **7** grupos de questões e respectivas alíneas, contém 1 página(s) e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Todas as questões deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que a prova tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Cotação e critérios de correção:

- A distribuição da cotação total (20 valores) pelos sete grupos de questões é a seguinte: Grupo I: 3,0 val.; Grupo II: 2,0 val.; Grupo III: 1,0 val.; Grupo IV: 4,0 val.; Grupo V: 4,0 val.; Grupo VI: 3,0 val.; Grupo VII: 3,0 val.
- Serão fatores a ter em conta para a avaliação da prova, a correção matemática das respostas, a **apresentação de todos os cálculos** necessários para a compreensão do raciocínio, bem como a **justificação cuidada** das respostas e a **redação clara e organizada** das mesmas. Respostas apresentadas sem qualquer justificação, mesmo que corretas, serão classificadas com zero valores.

I. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{10}\right\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Para qualquer decomposição, d, de $[0,1]$ seja $s_d(f)$ a correspondente soma de Darboux inferior de f, e $S_d(f)$ a superior. Mostre que $0 \leqslant s_d(f) \leqslant S_d(f) \leqslant 1$.

b) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Construa uma decomposição d_ε de $[0,1]$ tal que $S_{d_\varepsilon}(f) = \varepsilon$.

c) Poderá concluir algo sobre a integrabilidade à Riemann de f a partir do resultado da alínea anterior ? Se sim, o quê ? Justifique pormenorizadamente.

II. Utilizando resultados apropriados do integral de Riemann calcule a área da porção Ω de $\mathbb{R}^2$ entre as retas $x = -2$ e $x = 2$, limitada inferiormente pelo eixo dos xx e superiormente pelo gráfico da função $\varphi(x) = \min\left\{x^2, \frac{1}{x^2}\right\}$.

III. Relembrando que $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, determine, justificando cuidadosamente, a série de Mac-Laurin da função $g(x) = \arctan x$ e estude o seu intervalo de convergência.

IV. Considere a função $\psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x,y) = \frac{|\sin(x^2+y^2)|}{x^2+y^2}.$$

a) Determine, caso exista, ou justifique porque não existe, o limite de ψ em $(0,0)$.

b) É possível prolongar ψ a $\mathbb{R}^2$ de modo a que o prolongamento seja uma função contínua ? Se sim, determine esse prolongamento. Se não, explique proquê.

V. Considere a função θ definida por

$$\theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ com $x \neq 0$.

a) Justifique que θ é diferenciável no seu domínio.

b) Calcule a matriz jacobiana de θ.

VI. Determine, caso existam, todos os pontos de estacionaridade de $\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\xi(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ e esclareça se são pontos de máximo, de mínimo, ou de sela, de ξ. Se forem extremos, esclareça se são relativos ou absolutos.

VII. Considere a função $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x,y) = x^3y^3 - 3xy$.

a) Determine para que pontos (x_0, y_0) é que o Teorema da Função Implícita permite garantir que a equação $\Phi(x,y) = \sin(xy)$ define implicitamente uma função $y = \phi(x)$ para x numa vizinhança de x_0.

b) Verifique que $(x_0, y_0) = (1, 0)$ está nas condições da alínea anterior. Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem de ϕ em $x = 1$.

FIM

RESOLUÇÃO

I.a) É óbvio que, pela definição de somas de Darboux, tem-se sempre $s_d(f) \leqslant S_d(f)$. Agora, dada uma qualquer decomposição de $[0,1]$, tem-se que, em qualquer subintervalo I_j da decomposição, $\max_{I_j}(f) \leqslant 1$ e $\min_{I_j}(f) \geqslant 0$, e portanto, sendo $\ell(I_j)$ o comprimento do intervalo I_j,

$$s_d(f) = \sum_j \min_{I_j}(f)\ell(I_j) \geqslant \sum_j 0\ell(I_j) = 0,$$

$$S_d(f) = \sum_j \max_{I_j}(f)\ell(I_j) \leqslant \sum_j 1\ell(I_j) = \sum_j \ell(I_j) = 1$$

I.b) Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (digamos $\varepsilon < \frac{1}{100}$), considerem-se os pontos $\frac{1}{j} - \frac{\varepsilon}{18}, \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon}{18}$, com $j = 2, 3, \ldots, 10$. Estes pontos determinam uma decomposição d_ε de $[0,1]$ em 9 intervalos I_j de comprimento $\frac{\varepsilon}{9}$ em torno dos pontos $\frac{1}{j}$, com $j = 2, 3, \ldots, 10$, e em 10 intervalos disjuntos I_j, $j = 10, \ldots, 19$ cuja reunião é $[0,1] \setminus \cup_{j=1}^{9} I_j$.

Observando que, quando $j = 1, \ldots, 9$, tem-se $\max_{I_j}(f) = 1$ e $\ell(I_j) = \frac{\varepsilon}{9}$, e atendendo a que se tem $\max_{I_j}(f) = 0$ quando $j = 10, \ldots, 19$, conclui-se imediatamente que

$$\begin{aligned} S_d(f) &= \sum_{j=1}^{19} \max_{I_j}(f)\ell(I_j) \\ &= \sum_{j=1}^{9} \max_{I_j}(f)\ell(I_j) + \sum_{j=10}^{19} \max_{I_j}(f)\ell(I_j) \\ &= \sum_{j=1}^{9} 1\frac{\varepsilon}{9} + \sum_{j=10}^{19} 0\ell(I_j) = \varepsilon + 0 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer ε arbitrário (positivo e suficientemente pequeno, que é o que interessa no contexto de estudos de integrabilidade) tem-se que a partição d_ε construida acima cumpre o pretendido.

I.c) Dada uma qualquer outra decomposição d de $[0,1]$ pode-se sempre construir uma decomposição $\widetilde{d}$ mais fina (i.e., com mais intervalos) de $[0,1]$ juntanto aos pontos que definem d os pontos que definem a decomposição d_ε construida na alínea anterior. Consequentemente, pela construção da decomposição e pela teoria geral estudada, tem-se que, para $\widetilde{d}$, $0 = s_{\widetilde{d}}(f) \leqslant S_{\widetilde{d}}(f) \leqslant \varepsilon$. Consequentemente, dada a arbitrariedade de ε, conclui-se que f é integrável à Riemann em $[0,1]$ e tem-se $\int_0^1 f = 0$.

II. Tendo em conta o esboço de Ω na figura anexa, a área dessa porção de plano é

$$A(\Omega) = 2\int_0^1 x^2 dx + 2\int_1^2 x^{-2} dx = 2\frac{1^3}{3} + 2\big(-2^{-1} + 1^{-1}\big) = \frac{5}{3}.$$

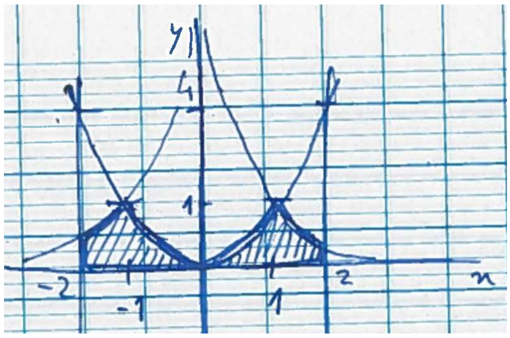

Figura 1: Esboço da porção Ω do plano $\mathbb{R}^2$.

III. Sabendo que a série de MacLaurin da função $w \mapsto \frac{1}{1-w}$ é $\sum_{j=0}^{\infty} w^j$, com região de convergência absoluta $I = \{w : |w| < 1\} =]-1, 1[$ e tendo em conta que a série é uniformemente convergente em qualquer subintervalo fechado de $]-1, 1[$, podemos concluir que, em I,

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{j=0}^{\infty} (-x^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}.$$

Integrando termo-a-termo entre 0 e um $x \in I$ arbitrário a série de potências (operação que é válida devido à série ser uniformemente convergente em subconjuntos fechados de I) conclui-se que

$$g(x) = \arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1},$$

e a região de validade desta série de MacLaurin é $I =]-1, 1[$.

IV.a) Podemos resolver esta questão de várias formas. Uma delas, talvez a mais simples, consiste em, no domínio de ψ, mudar para variáveis polares $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$, onde $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, e escrever

$$\psi(x, y) = \frac{|\sin(x^2 + y^2)|}{x^2 + y^2} = \frac{\left|\sin \rho^2\right|}{\rho^2}.$$

Consequentemente, como $\rho^2 = x^2 + y^2 \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$, e atendedo a que $\frac{\sin w}{w} \to 0$ quando $w \to 0$, concluímos que o limite existe e é igual a 0.

IV.b) Existindo limite de ψ em $(0, 0)$, podemos construir um prolongamento $\widetilde{\psi}$ de ψ a esse ponto escrevendo

$$\widetilde{\psi}(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

É claro que $\widetilde{\psi}$ é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (porque é aí igual a ψ, que é a razão entre uma função composta (de um seno com um polinómio) e um polinómio e, como todas as funções envolvidas são contínuas, o resultado, $\widetilde{\psi}$, também o será. Por outro lado, em $(0, 0)$ tem-se que $\widetilde{\psi}(0, 0)$ é igual ao limite dessa função quando $(x, y) \to (0, 0)$ por valores distintos de $(0, 0)$ e, portanto, tem-se continuidade de $\widetilde{\psi}$ nesse ponto.

V.a) A função real de variável real $q(w) = \arctan w$ é diferenciável no seu domínio (que é $D_q = \mathbb{R}$) e as funções $p_1(x,y) = x$ e $p_2(x,y) = y$ são polinómios e, portanto, são diferenciáveis nos respetivos domínios (que são ambos $D_{p_1} = D_{p_2} = \mathbb{R}^2$). Portanto, pelos resultados estudados, sabemos que a função dada, a qual é $\theta = q \circ \frac{p_1}{p_2}$, é diferenciável no seu domínio, o qual é $D_\theta = \big\{(x,y) \in D_{p_1} \cap D_{p_2} : \frac{p_1}{p_2}(x,y) \in D_q \wedge p_2(x,y) \neq (0,0)\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\big\}$, o que prova o pretendido.

V.b) Atendendo à diferenciabilidade provada na alínea anterior tem-se, pelo teorema de derivação das funções compostas (regra da cadeia),

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

e portanto a matriz jacobiana de θ é

$$J_\theta(x,y) = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{x}{x^2 + y^2}\right]$$

VI. Os pontos de estacionaridade de ξ são os pontos de (x,y) que anulam o gradiante de ξ, ou seja, satisfazem as condições

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,1).$$

Atendendo a que $\xi(0,1) = 0$ e a que $\xi(x,y) > 0$ para qualquer outro (x,y) distinto de $(0,1)$ podemos concluir que o ponto de estacionaridade $(0,1)$ é um ponto de mínimo absoluto da função ξ.

VII.a) Atendendo aos dados do exercício, o teorema da função implícita assegura-nos que a equação $F(x,y) := \Phi(x,y) - \sin(xy) = x^3y^3 - 3xy - \sin(xy) = 0$ define implicitamente y como função de x quando $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Como

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2x^3 - 3x - x\cos(xy) = x\big(3y^2x^2 - 3 - \cos(xy)\big)$$

conclui-se que o teorema da função implícita é aplicável desde que $x_0 \neq 0$ e $3y_0^2x_0^2 - 3 - \cos(x_0y_0) \neq 0$.

VII.b) Como para o ponto $(x_0, y_0) = (1,0)$ tem-se $x_0 = 1 \neq 0$ e $3 \times 0^2 \times 1^2 - 3 - \cos(1 \times 0) = -4 \neq 0$, concluimos imediatamente pela alínea anterior que, numa vizinhança V_{x_0} de $x_0 = 1$, está definida uma função $y = \phi(x)$, com $y_0 = \phi(x_0)$ e tal que $F(x, \phi(x)) = 0$ para todos os pontos $x \in V_{x_0}$. Relembrando a expressão de F na alínea anterior tem-se, derivando ambos os membros da identidade $F(x, \phi(x)) = 0$ em V_{x_0} (e escrevendo ϕ em vez de $\phi(x)$, etc.)

$$3x^2\phi^3 + 3x^3\phi^2\phi' - 3\phi - 3x\phi' - (\phi + x\phi')\cos(x\phi) = 0. \tag{1}$$

Considerando $(x, \phi(x)) = (x_0, \phi(x_0)) = (x_0, y_0) = (1, 0)$ conclui-e de (1) que

$$0 + 0 - 0 - 3 \times 1 \times \phi'(1) - 1 \times \phi'(1) \times \cos(1 \times 0) = 0 \Leftrightarrow -4\phi'(1) = 0 \Leftrightarrow \phi'(1) = 0.$$

Voltando à expressão (1) e derivando-a novamente (em ordem à única variável independente aí presente, x) tem-se

$$\begin{aligned} 6x\phi^3 + 9x^2\phi^2\phi' + 9x^2\phi^2\phi' + 6x^3(\phi')^2\phi + 3x^3\phi^2\phi'' - 3\phi' - 3\phi' - 3x\phi'' + \\ + (\phi + x\phi')^2 \sin(x\phi) - (\phi' + \phi' + x\phi'') \cos(x\phi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Fazendo agora, novamente, $x_0 = 1, \phi(x_0) = y_0 = 0$ e usando o resultado obtido acima, a saber, $\phi'(1) = 0$, a igualdade (2) permite concluir que

$$-3 - 3 - 3\phi''(1) - (0 + 0 + \phi'(1)) = 0 \Leftrightarrow \phi''(1) = -\tfrac{3}{2}.$$

Consequentemente, o polinómio de Taylor de segunda ordem de ϕ no ponto $x_0 = 1$ é

$$P_2(x) = \phi(1) + \phi'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}\phi''(1)(x-1)^2,$$

ou seja

$$P_2(1) = -\frac{3}{4}(x-1)^2.$$