UAb

ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

ATIVIDADE FORMATIVA 2

Período de realização

Decorreu de 9 a 15 de Maio de 2023

Proposta de resolução da Atividade

1.

1.1 O espaço de resultados é o conjunto de todos os valores possíveis que se podem obter quando se faz girar a roleta. Ou seja, é o conjunto

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Este é o domínio da variável aleatória X, definida pelo número obtido por se fazer girar a roleta,

$$X(i) = i, \quad i \in S$$

1.2 Quando se gira a roleta só se obtém uma única casa numerada. Isto significa que

$$P(X > 17) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) \tag{1}$$

Por outro lado, e de acordo com o enunciado,

$$P(X = 18) = P(X = 19) = P(X = 20) \tag{2}$$

Deste modo, para se determinar a probabilidade (1), primeiro temos de calcular o valor de (2).
De acordo com o enunciado, $P(X > 14) = 4P(X < 15)$. Seja então $x = P(X < 15)$.
Como $X(S) = S$ pode ser escrito como uma união disjunta,

$$X(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \cup \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

tem-se

$$1 = P(X \in X(S)) = P(X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}) +$$

$$+ P(X \in \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}) = P(X < 15) + P(X > 14) = x + 4x = 5x$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

o que implica que $P(X < 15) = x = \frac{1}{5}$ e, portanto, $P(X > 14) = 4x = \frac{4}{5}$. Obtém-se, assim,

$$\frac{4}{5} = P(X > 14) = P(X = 15) + P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) +$$

$$+ P(X = 19) + P(X = 20)$$

Como, de acordo com o enunciado, as probabilidades que surgem no lado direito desta igualdade são todas iguais entre si, tem-se, ainda,

$$\frac{4}{5} = 6P(X = i)$$

para qualquer $i = 15, 16, 17, 18, 19, 20$. Deste modo

$$P(X = i) = \frac{2}{15}, \quad \imath = 15, 16, 17, 18, 19, 20$$

e, assim,

$$P(X > 17) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = 3 \times \frac{2}{15} = \frac{6}{15}$$

1.3 De igual modo tem-se

$$\frac{1}{5} = P(X < 15) = \sum_{i=1}^{1} 4P(X = i) = 14P(X = i_0)$$

para qualquer $i_0 = 1, 2, \ldots, 14$, pelo que

$$P(X = i_0) = \frac{1}{70}, \quad \forall i_0 \in \{1, 2, \ldots, 14\}$$

Assim, designando por A o acontecimento "'saída de uma casa numerada com um número par"', obtém-se

$$P(A) = \sum_{k=1}^{10} P(X = 2k) = \sum_{i=1}^{7} P(X = 2k) + \sum_{i=8}^{10} P(X = 2k) = 7 \times \frac{1}{70} + 3 \times \frac{2}{15} = \frac{1}{2}$$

2.

2.1 Em relação a este exercício, observe-se que a componente aleatória está no resultado obtido pelo lançamento do par de dados.
Conhecido o número de pintas inscrito em cada um dos dados, o valor da soma do número de pintas é um resultado perfeitamente conhecido, e único. O mesmo acontece com a aplicação da regra "'noves fora"'. Ou seja, quer na soma dos valores obtidos, quer na aplicaçao da regra, não há nada de aleatório.
Isto significa que o espaço de resultados é o espaço de resultados da experiência aleatória que consiste no lançaamento de um par de dados, ou seja, o conjunto

$$\Omega := \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5.6\}$$

A variável aleatória subjacente a uma determinada experiência aleatória tem por domínio o espaçoo de resultados da experiência aleatória. No caso em análise,

ABERTA UNIVERSIDADE www.uab.pt

isto significa que a variável aleatória X tem por domínio o conjunto Ω. De acordo com o enunciado, tem-se que X está definida pelo valor obtido pela aplicação da regra "'noves fora"' à soma dos pontos obtidos pelo lançamento de um par de dados. Dito de outro modo,

$$X(i,j) = \begin{cases} i+j & se \quad i+j < 9 \\ i+j-9 & se \quad i+j \geq 9 \end{cases}$$

para qualquer par ordenado $(i,j) \in \Omega$.

2.2 Como se pode constatar por análise de cada par $(i,j) \in \Omega$, só para os pares ordenados $(1,1),(5,6),(6,5)$ é que a aplicação da regra "'noves fora"' 'à soma das coordenadas dá o valor 2.

2.3 Como vimos na alínea anterior

$$X(1,1) = X(5,6) = X(6,5) = 2$$

e são só estas as 3 maneiras distintas para se obter $X = 2$. Por outro lado, num lançamento de dois dados, há 36$= \#\Omega$ resultados possíveis. Logo,

$$P(X=2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Para se calcular

$$P(X \leq 5 | X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 2)}$$

observe-se que

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{n_1}{36}, \quad P(X \geq 2) = \frac{n_2}{36}$$

onde n_1 (resp., n_2) designa o número de maneiras distintas como se pode obter $2 \leq X \leq 5$ (resp., $X \geq 2$). Logo,

$$P(X \leq 5 | X \geq 2) = \frac{13}{29}$$

2.4 Em relação à variável aleatória X, observe-se que

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Isto significa que o domínio da função de probabilidade f de X é o conjunto

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Uma análise semelhante à realizada na alínea 2.3 para o cálculo de $P(X=2)$ permite concluir que f, $f(x) := P(X=x)$, é definida por

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) = P(X=x)$	1/9	1/12	1/12	1/12	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36

Para responder à segunda parte da questão, comece-se por observar que o domínio de uma funçao de distribuição é sempre igual $\mathbf{R}$. Por conseguinte, o mesmo acontece com o caso particular em estudo.
Para se determinar o modo como a função de distribuição F da variável aleatória X está definida, note que, por $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, tem-se:

ABERTA UNIVERSIDADE www.uab.pt

[•] Para valores x negativos, não há nenhum elemento $(i,j) \in \Omega$ para o qual se tenha $X(i,j) \leq x$. Ou seja, o conjunto $\{(i,j) \in \Omega : X(i,j) \leq x\}$ (abreviadamente $\{X \leq x\}$) é vazio. Logo, e pelas propriedades duma probabilidade,

$$F(x) := P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

Mas isto no caso de x ser um valor negativo.

[•] Para valores de x no intervalo $[0, 1\,[$, $\{X \leq x\} = \{X = 0\}$. Assim,

$$F(x) := P(X \leq x) = P(X = 0) = f(0) = \frac{1}{9}$$

[•] Para valores de x no intervalo $[1, 2\,[$, $\{X \leq x\} = \{X \in \{0,1\}\}$. Logo,

$$F(x) := P(X \leq x) = P(X \in \{0,1\}) = P(X = 0) + P(X = 1) = f(0) + f(1) = \frac{7}{36}$$

[•] Generalizando, tem-se então

$$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}}} P(X = y) =$$

$$= \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}}} f(y), \forall x \in \mathbf{R}$$

Ou seja, a função de distribuição F está definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1/9 & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 7/36 & se \quad 1 \leq x < 2 \\ 5/18 & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 13/36 & se \quad 3 \leq x < 4 \\ 4/9 & se \quad 4 \leq x < 5 \\ 5/9 & se \quad 5 \leq x < 6 \\ 25/36 & se \quad 6 \leq x < 7 \\ 31/36 & se \quad 7 \leq x < 8 \\ 1 & se \quad x \geq 8 \end{cases}$$

3.

3.1 Dado que a variável aleatória X assume apenas os valores -1, 0, 1 e 2, em termos da função de probabilidade f de X, $f(x) := P(X = x)$, isto significa que

$$f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) = 2\alpha + 0.3 + 0.4 + \alpha = 1$$

ou seja, $\alpha = 0.1$.

Com efeito, por X assumir valores no conjunto $\{-1, 0, 1, 2\}$ e por este conjunto se poder escrever como uma união de conjuntos disjuntos dois a dois,

$$\{-1, 0, 1, 2\} = \bigcup_{n=-1}^{2} \{n\}$$

tem-se

$$1 = P(X \in \{-1, 0, 1, 2\}) = \sum_{n=-1}^{2} P(X = n) = \sum_{n=-1}^{2} f(n)$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

3.2 Para os vários valores pedidos:

[•] Sendo 2 uma constante, tem-se

$$E(X+2) = E(X) + E(2) = E(X) + 2$$

com

$$E(X) = \sum_{n=-1}^{2} nP(X=n) = \sum_{n=-1}^{2} nf(n) =$$

$$= (-1)f(-1) + 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) = 0.4$$

Assim, $E(X+2) = 0.4 + 2 = 2.4$.

[•] Tem-se

$$E(X^2) = \sum_{n=-1}^{2} n^2 P(X=n) = \sum_{n=-1}^{2} n^2 f(n) =$$

$$= (-1)^2 f(-1) + 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) = 1$$

[•] Pelo cálculo anterior tem-se $E(X^2) = 1$ e, por conseguinte,

$$P(X < E(X^2)) = P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0.5$$

3.3 Considere-se a variável aleatória $Y = X^2$. Atendendo aos valores assumidos pela variável aleatória X, -1, 0, 1 e 2, resulta que Y só pode assumir os valores 0, 1 e 4, tendo-se

$$P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = 0.3$$

$$P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=-1) + P(X=1) = 0.6$$

$$P(Y=4) = P(X^2=4) = P(X=2) = 0.1$$

Em termos de função de probabilidade g de Y , isto significa que g está definida no conjunto $\{0, 1, 4\}$, tendo-se

y	0	1	4
$g(y) := P(Y=y)$	0.3	0.6	0.1

4. Considere-se a variável aleatória X que designa o número de vezes que sai o número 2 em cinco lançamentos de um dado.
Como a probabilidade de sair o número 2 mantém-se no primeiro, no segundo, no terceiro, no quarto e no quinto lançamentos, sempre igual a $p = 1/6$ e, além disto, os cinco lançamentos correspondem a cinco provas independentes, a variável aleatória X segue **uma distribuição binomial** com $n = 5$ e $p = 1/6$. Pelo conhecimento que se tem sobre a função de probabilidade correspondente a esta distribuição, conclui-se assim que a probabilidade pedida é igual a

$$P(X=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{10 \times 5^3}{6^5}$$

5.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

5.1 Considere a variável aleatória X que designa o número de vezes que sai um berlinde defeituoso nas 20 tiragens. Como em cada tiragem existe reposição do berlinde retirado, a probabilidade de sair um berlinde defeituoso em cada tiragem é sempre igual em cada uma das 20 tiragens:

$$p = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$$

Acresce que, ainda devido à reposição, as 20 tiragens correspondem a 20 provas independentes. Por estas razões, a vari´avel aleatória X segue uma distribuição binomial com $n = 20$ e $p = 3/16$. Assim, a probabilidade de em 20 tiragens ser encontrado um único berlinde defeituoso é igual a

$$P(X = 1) = \binom{20}{1} p^1 (1-p)^{20-1} = 20\frac{3}{16}\left(\frac{13}{16}\right)^{19} = \frac{15}{4}\left(\frac{13}{16}\right)^{19}$$

5.2 Mais geralmente, designemos por X_n a variável aleatória que designa o número de vezes que sai um berlinde defeituoso em $n \geq 1$ tiragens. Pelas mesmas razões indicadas na alínea anterior, X_n segue uma distribuição binomial com n e $p = 3/16$. Pretende-se determinar o menor valor de n tal que

$$0.4 < P(X_n = 1) = \binom{n}{1} p (1-p)^{n-1} = n\frac{3}{16}\left(\frac{13}{16}\right)^{n-1}$$

ou seja, tal que

$$n\left(\frac{13}{16}\right)^{n} > 0.4 \times \frac{16}{3} \times \frac{13}{16} = 0.4 \times \frac{13}{3}$$

Resolvendo esta inequação por "'tentativa e erro"', tém-se

$$(n = 1)\ \ \frac{13}{16} = 0.8125 < 1.7(3) = 0.4 \times \frac{13}{3}$$

$$(n = 2)\ \ 2\left(\frac{13}{16}\right)^{2} = 1.3203125 < 1.7(3) = 0.4 \times \frac{13}{3}$$

$$(n = 3)\ \ 3\left(\frac{13}{16}\right)^{3} = 1.609130859 < 1.7(3) = 0.4 \times \frac{13}{3}$$

$$(n = 4)\ \ 4\left(\frac{13}{16}\right)^{4} = 1.743225098 > 1.7(3) = 0.4 \times \frac{13}{3}$$

pelo que serão necessárias 4 tiragens para que a probabilidade de se retirar um berlinde defeituoso seja superior a 40%.

6. Uma vez que agora os berlindes são retirados sem reposição, as várias extrações deixam de ser independentes e a probabilidade de saída de um berlinde defeituoso altera-se de extração para extração, quer por se alterar o número total de berlindes existentes na caixa, quer por eventualmente se alterar o número de berlindes defeituosos que permanecem na caixa (resultante, obviamente, de extrações anteriores de berlindes defeituosos).
Isto significa que considerando a variável aleatória Y que designa o número de berlindes

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

defeituosos nos 20 berlindes retirados, Y segue uma **distribuição hipergeométrica** com $N = 80, M = 15$ e $n = 20$. A probabilidade pedida é então igual a

$$P(Y = 2) = \frac{\binom{M}{2}\binom{N-M}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{15}{2}\binom{65}{18}}{\binom{80}{20}}$$

7. Seja X uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$. Neste caso, a função de probabilidade de X é dada por

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

sendo a função geradora de momentos Ψ_X definida por

$$\Psi_X(t) := E\left(e^{tX}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}P(X = n) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}\frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$$

para todo o $t \geq 0$.

8. Designando por X_A, X_B e X_C as variáveis aleatórias "'número de pessoas que se dirigiam por hora aos centros, respectivamente, A, B e C"', decorre do enunciado que cada variável aleatória X_A, X_B, X_C tem uma distribuição de Poisson de média, respetivamente, $E(X_A) = 5$, $E(X_B) = 10$, $E(X_C) = 3$. Uma vez que o atendimento em cada um dos três centros era independente dos restantes, tem-se então que a nova variável aleatória $X = X_A + X_B + X_C$ "'número de pessoas que se dirigem por hora ao novo centro"' tem uma distribuição de Poisson de média $E(X) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) = 18$. Assim, a probabilidade de numa hora serem atendidas 12 pessoas neste novo centro é igual a

$$P(X = 12) = \frac{18^12}{12!}e^{-18} = 0.036782$$

9. Este exercício relaciona as funções de probabilidade f_X e f_Y de duas variáveis aleatórias discretas, X e Y , com a função de probabilidade conjunta f das variáveis X e Y (ou do par aleatório (X, Y)). Para se perceber a relação entre estas noções, note-se que por Y ter valores no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tem-se

$$P(X = x) = P(X = x, Y \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$$

Por outro lado, observe-se que o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pode claramente escrever-se como uma união de conjuntos disjuntos dois a dois,

$$\{0, 1, 2, 3, 4\} = \bigcup_{y=0}^{4}\{y\}$$

Isto permite concluir, por definição de probabilidade, que

$$P(X = x) = P(X = x, Y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}) = P\left(X = x, Y \in \bigcup_{y=0}^{4}\{y\}\right) = \sum_{y=0}^{4} P\left(X = x, Y = y\right)$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

Atendendo a que a função de probabilidade conjunta f é, por definição, dada por

$$f(x,y) = P\left(X = x, Y = y\right)$$

e que a função de probabilidade f_X da variável aleatória X é, também por definição, definida por

$$f_X(x) = P(X = x)$$

obtemos assim a igualdade bem conhecida (f_X coincide com a função de probabilidade marginal de X)

$$f_X(x) = P(X = x) = P(X = x, Y \in \{0,1,2,3,4\}) = \sum_{y=0}^{4} P\left(X = x, Y = y\right) = \sum_{y=0}^{4} f(x,y) \tag{3}$$

Um raciocínio análogo permite ainda derivar a igualdade

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{3} f(x,y) \tag{4}$$

9.1 Por recurso à igualdade (3), tem-se, assim,

$$0.30 = f_X(0) = \sum_{y=0}^{4} f(0,y) = 0.10 + f(0,1) + 0.05 + 0 + 0$$

pelo que fica determinado o valor em falta na primeira linha da tabela: $f(0,1) = 0.15$. O mesmo raciocínio permite também determinar o valor em falta na segunda linha da tabela, $f(1,4) = 0.05$.
Utilizando agora a igualdade (4), obtém-se

$$0.40 = f_Y(0) = \sum_{x=0}^{3} f(x,0) = 0.10 + 0 + f(2,0) + 0.15 \Rightarrow f(2,0) = 0.15$$

$$0.20 = f_Y(2) = \sum_{x=0}^{3} f(x,2) = 0.05 + 0.05 + 0 + f(3,2) \Rightarrow f(3,2) = 0.10$$

Ficam assim a faltar três valores: $f(3,4)$, $f(2,1)$ e $f(2,4)$. Para o primeiro, note-se que, por (3),

$$0.25 = f_X(3) = 0.15 + 0 + f(3,2) + 0 + f(3,4) = 0.15 + 0.10 + f(3,4) \Rightarrow f(3,4) = 0$$

e por (4)

$$0.05 = f_Y(4) = 0 + f(1,4) + f(2,4) + f(3,4) = 0.05 + f(2,4) + 0 \Rightarrow f(2,4) = 0$$

Por fim, tem-se por (3)

$$0.25 = f_X(2) = f(2,0) + f(2,1) + 0 + 0.05 + f(2,4) = 0.15 + f(2,1) + 0.05 \Rightarrow f(2,4) = 0.05$$

com o que fica completa a tabela:

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$x=0$	0.10	0.15	0.05	0	0
$x=1$	0	0.05	0.05	0.05	0.05
$x=2$	0.15	0.05	0	0.05	0
$x=3$	0.15	0	0.10	0	0

9.2 Esta alínea resolve-se de forma semelhante à pergunta 3.1. Uma vez que a variável aleatória Y assume apenas os valores 0, 1, 2, 3 e 4, em termos da função de probabilidade f_Y de Y , $f_Y(y) = P(Y = y)$, isto significa que

$$f_Y(0) + f_Y(1) + f_Y(2) + f_Y(3) + f_Y(4) = 0.40 + \alpha + 0.20 + 0.10 + 0.05 = 1$$

ou seja, $\alpha = f_Y(1) = P(Y = 1) = 0.25$.

9.3 Para se determinar o valor de

$$Cov(X,Y) := E(XY) - E(X)E(Y)$$

comece-se por notar que, cálculos semelhantes aos realizados na alínea 3.2 para se determinar o valor de $E(X)$, conduzem a

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x f_X(x) = 0.20 + 2 \times 0.25 + 3 \times 0.25 = 1.45$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{4} y f_Y(y) = 0.25 + 2 \times 0.20 + 3 \times 0.10 + 4 \times 0.05 = 1.15$$

Por outro lado

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{4} xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{4} xyf(x,y) =$$

$$= \sum_{x=0}^{3} (x \times 0 \times f(x,0) + x \times 1 \times f(x,1) + x \times 2 \times f(x,2)+$$

$$+x \times 3 \times f(x,3) + x \times 4 \times f(x,4)) =$$

$$= 1 \times 1 \times f(1,1) + 2 \times 1 \times f(2,1) + 3 \times 1 \times f(3,1)+$$

$$+1 \times 2 \times f(1,2) + 2 \times 2 \times f(2,2) + 3 \times 2 \times f(3,2)+$$

$$+1 \times 3 \times f(1,3) + 2 \times 3 \times f(2,3) + 3 \times 3 \times f(3,3)+$$

$$+1 \times 4 \times f(1,4) + 2 \times 4 \times f(2,4) + 3 \times 4 \times f(3,4) = 1.5$$

Assim,

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.5 - 1.45 \times 1.15 = -0.1675$$

Sendo este valor diferente de zero, conclui-se, assim, que as variáveis X e Y não são independentes.

10.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

10.1

[10.1.1] A tabela seguinte exibe apenas os pontos amostrais (x, y) para os quais a probabilidade conjunta $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ é igual a $c(2x + y)$. Para todos os outros casos, $f(x, y) = 0$.

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	Totais
$x = 0$	0	c	$2c$	$3c$	$4c$
$x = 1$	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
$x = 2$	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
Totais	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	$42c$

Sendo f uma função de probabilidade conjunta, o total

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} f(x, y) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} f(x, y) = 42c$$

Deverá ser igual a 1, logo, $c = 1/42$.

[10.1.2] Pela tabela conclui-se que

$$P(X = 2, Y = 1) = f(2, 1) = 5c = \frac{5}{42}$$

[10.1.3] Para se determinar o valor pretendido, dos valores da tabela há que somar aqueles destacados na tabela:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	Totais
$x = 0$	0	c	$2c$	$3c$	$4c$
$x = 1$	**2c**	**3c**	**4c**	$5c$	$14c$
$x = 2$	**4c**	**5c**	**6c**	$7c$	$22c$
Totais	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	$42c$

Para este processo obtém-se

$$P(X \geq 1, Y \leq 2) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{2} f(x, y) = 24c = \frac{4}{7}$$

[10.1.4] A função de probabilidade marginal de X é dada por

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} f(x, y), \quad x \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

e pode ser obtida a partir dos totais marginais da coluna da direita das tabelas anteriores. Deste modo, obtém-se

$$f_X(x) = \begin{cases} 6c = 1/7 & se \quad x = 0 \\ 14c = 1/3 & se \quad x = 1 \\ 22c = 11/21 & se \quad x = 2 \\ 0 & se \quad x \in \mathbf{N}, x \geq 3 \end{cases}$$

De modo semelhante, a função de probabilidade marginal de Y

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{y=0}^{2} f(x, y), \quad y \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

pode ser obtida a partir dos totais marginais da última linha das tabelas anteriores, o que conduz a

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6c = 1/7 & se & y = 0 \\ 9c = 3/14 & se & y = 1 \\ 12c = 2/7 & se & y = 2 \\ 15c = 5/14 & se & y = 3 \\ 0 & se & x \in \mathbf{N}, y \geq 4 \end{cases}$$

10.2 As variáveis X e Y são dependentes. Com efeito, pela alínea 10.1.2 tem-se

$$P(X = 2, Y = 1) = f(2, 1) = \frac{5}{42}$$

diferente do valor do produto

$$P(X = 2)P(Y = 1) = f_X(2)f_Y(1) = \frac{11}{21} \times \frac{3}{14}$$

11.

11.1 Seja $p_X(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. X.

$$\forall x \ : \ p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

e $p_Y(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. Y.

$$\forall y \ : \ p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

A tabela seguinte apresenta as funções de probabilidades marginais:

$p_{X,Y}(x,y)$	$Y = 1000$	$Y = 2000$	$Y = 3000$	$Y = 4000$	$p_X(x)$
$X = 1000$	0.20	0.04	0.01	0	0.25
$X = 2000$	0.10	0.36	0.09	0	0.55
$X = 3000$	0	0.05	0.10	0	0.15
$X = 4000$	0	0	0	0.05	0.05
$p_Y(y)$	0.3	0.45	0.2	0.05	

11.2 Seja $p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000)$ a probabilidade do primeiro titular ter um rendimento mensal de 2000 euros, admitindo que o segundo titular tem um rendimento idêntico.

$$p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000) = \frac{p_{X,Y}(X = 2000, Y = 2000)}{p_Y(Y = 2000)} =$$

$$= \frac{0.36}{0.45} = 0.89$$

11.3

$$E(X) = \sum_x x p_X(x) = 1000 \times 0.25 + 2000 \times 0.55 + 3000 \times 0.15 + 4000 \times 0.05 = 2000$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

$$E(Y) = \sum_y y p_Y(y) = 1000 \times 0.30 + 2000 \times 0.45 + 3000 \times 0.20 + 4000 \times 0.05 = 2000$$

$$Var(X) = \sum_x (X - E(X))^2 p_X(x) = (1000-2000)^2 \times 0.25 + (2000-2000)^2 \times 0.55 +$$

$$+(3000-2000)^2 \times 0.15 + (4000-2000)^2 \times 0.05 = 600000$$

$$\sigma_X = \sqrt{600000} = 774.6$$

$$Var(Y) = \sum_y (Y - E(Y))^2 p_Y(y) = (1000-2000)^2 \times 0.30 + (2000-2000)^2 \times 0.45 +$$

$$+(3000-2000)^2 \times 0.20 + (4000-2000)^2 \times 0.05 = 700000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{700000} = 836.7$$

11.4 As variáveis X e Y são independentes se se verificarem as seguintes condições, para todos os valores de x e y:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = p_Y(y)$$

donde,

$$\forall x, y : p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

Mas como pela alínea anterior $p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000) = 0.8$ e $p_X(X = 2000) = 0.55$, conclui-se que as variáveis não são independentes.

11.5

$$Cov(X,Y) = E\left[(x - E(X))\,(y - E(Y))\right] = \sum_x \sum_y (x - E(X))\,(y - E(Y))\, p_{X,Y}(x,y)$$

também se poderia utilizar

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

substituindo

$$Cov(X,Y) = (1000-2000)(1000-2000)0.20 + (1000-2000)(2000-2000)0.04 + \cdots +$$

$$+(3000-2000)(3000-2000)0.10 + (4000-2000)(4000-2000)0.05 = 490000$$

O coeficiente de correlação linear entre X e Y

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} =$$

$$= \frac{490000}{774.6 \times 836.7} = 0.756$$

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

11.6

$$E(R) = E\left(X+Y\right) == E(X) + E(Y) =$$
$$= 2000 + 2000 = 4000$$
$$Var(R) = Var\left(X+Y\right) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) =$$
$$= 600000 + 700000 + 2 \times 490000 = 2280000$$
$$\sigma_R = \sqrt{2280000} = 1509.97$$

12. Seja Y - v.a. número de bolinhos de feijão de tamanho não conforme (abaixo do permitido) entre os 5 retirados da fornada.
Então, Y segue uma distribuição Hipergeométrica $H(Mp, M(1-p), N)$ em que p representa a proporção de bolinhos não conformes na formada ($p = 0.01$) e M o número de bolinhos que compõe a fornada ($M = 300$).

$$Y \sim H(3, 297, 5)$$

A função de probabilidade de Y é:

$$p(y) = P(Y = y) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 297 \\ 5-y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 300 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Pretende-se

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - p(0)$$

e

$$p(0) = P(Y = 0) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 297 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 300 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{297!\ 5!\ 295!}{5!\ 300!\ 292!} = 0.951$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - 0.951 = 0.049$$

FIM

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt