ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 3 a 13 de novembro de 2023

Hora Limite de Entrega

13 de novembro de 2023, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira; deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

Cada questão do Grupo II tem a cotação de 0.5 valores.

Os Grupos III, IV, e V têm cotação de 0.9, 0.7 e 0.9 valores

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

A ordem dos questõess na resposta deve corresponder à ordem no enunciado.

O seu e-fólio não deve ultrapassar 14 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega.
Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

I. (*0.5 val.*) Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** AB não é definido

☐ **b)** AC é definido

☐ **c)** $(BC)^2$ é invertível

☐ **d)** CB é invertível

2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ tais que $\det A = 3$, e $\det B + \det C = i$.

Então, para todas as opções possíveis de A, B e C, temos que:

☐ **a)** $\det(A + B + C) = 3 + i$

☐ **b)** $\det\left(-A(B + C)^{-1}\right) = 3i$

☐ **c)** $\det(A^2BC) = 9i$

☐ **d)** $\det\left(-(B + C)A^{-1}\right) = \frac{i}{3}$

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*1 val.*)

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ r_3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

em que r_3 consiste nos três últimos dígitos do seu número de estudante (por exemplo, se o seu número de estudante for 2300123, então $r_3 = 123$).

a. Determine justificadamente $\det A$.

b. A equação $AX = b$ tem uma solução única $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. Determine justificadamente o valor do x_4.

III. (*0.9 val.*)

Considere o sistema

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ -ax - 2y - az = -3 \\ 2y + 2az = 2c. \end{cases} \tag{1}$$

onde $a, c \in \mathbb{R}$. Determine para quais combinações de a e c o sistema (1) não tem solução, tem uma solução única ou tem infinitas soluções.

IV. (*0.7 val.*)

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Encontrar todas as matrizes em $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ que comutam com A.

V. (*0.9 val.*)

Sejam $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & * & * \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & * & * & * \\ a_n & * & \cdots & * & * & * \end{bmatrix}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e os $*$ representam também valores arbitrários de $\mathbb{R}$, que podem ou não ser distintos.

Mostre que $\det A = \pm a_1 a_2 \cdots a_n$, e descreva como escolher o $\pm$ nesta expressão (dica: isto só depende de n).

Fim