2021/2022

[P-FÓLIO – 29 DE JUNHO DE 2022]

1. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}$ das 26 letras do alfabeto português. Determine o número total de sequências com 5 letras que se podem formar de modo que a primeira letra e a última letra sejam vogais distintas e que as restantes letras sejam consoantes todas diferentes.

$A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$

vogais $= \{a, e, i, o, u\}$

consoantes $= \underbrace{26 \text{ letras}}_{\text{Alfabeto português}} - 5 \text{ vogais} = 21$ consoantes

a, e, i, o, u

$\underline{5} \times \underline{21} \times \underline{20} \times \underline{19} \times \underline{4}$

-1 que já foi usada

-2 que já foram usadas

Pelo princípio multiplicativo tem-se;

$5 \times 21 \times 20 \times 19 \times 4 = 159600$

Existem 159600 sequências com 5 letras que se podem formar de modo a que a primeira e a última letra sejam vogais distintas e que as restantes consoantes todas distintas.

2. Mostre que

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k}\right)^4}_{\text{I}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}}_{\text{II}}.$$

I Pelo teorema binomial tem-se que

$$\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k} = (1-3)^n = (-2)^n$$

$$\left((-2)^n\right)^4 = (-2)^{4n} = 2^{4n}$$ ($4n$ é par logo quadrado de par dá número positivo)

II Pelo teorema binomial tem-se que

$$\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k} = (1+1)^{4n} = (2)^{4n} = 2^{4n}$$

logo $2^{4n} = 2^{4n}$, por tanto $\left(\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}$

3. Identifique os valores a para os quais existem soluções inteiras da equação

$$3827x + 1634y = a.$$

tem-se que $ax + by = c$ possui soluções com $x, y \in \mathbb{Z}$ se e só se $mdc(a,b) \mid c$ (corolário 1.8) neste caso a equação diofantina só tem soluções inteiras se

$$mdc(3827, 1634) \mid a$$

Aplicando o algoritmo de euclides sucessivamente tem-se

$3827 = 1634 \times 2 + 559 \rightarrow mdc(3827, 1634) = mdc(1634, 559)$

$1634 = 559 \times 2 + 516 \rightarrow mdc(1634, 559) = mdc(559, 516)$

$559 = 516 \times 1 + 43 \rightarrow mdc(559, 516) = mdc(516, 43)$

$516 = 43 \times 12 + 0 \rightarrow mdc(516, 43) = mdc(43, 0)$

Logo $mdc(3827, 1634) = 43$ assim $43 \mid a$ quando os valores de a são multiplos de 43.

4. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 535a_{n-1} - 2124a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 0$ e $a_1 = 527$.

4.1. Sem determinar a_n, por recurso ao método de indução matemática mostre que $a_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Determine a_n, $n \in \mathbb{N}$.

4.3. Prove que cada a_n, $n \in \mathbb{N}$, é um múltiplo de 31.

4.4. Determine $\text{mmc}(a_n, 17)$, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{4.1}$

Base $n = 0$

$a = 0$

$0 \in \mathbb{Z}$

Base para $n = 1$

$a_1 = 527$

$527 \in \mathbb{Z}$

Hipotese: suponha-se para algum $m \in \mathbb{N}$ fixo que $a_m \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{N} : m \leq m$

Tese: $a_{m+1} \in \mathbb{Z}$, m é o m fixado na hipotese.

Passo indutivo:

$a_{m+1} = 535a_{(m+1)-1} - 2124a_{(m+1)-1}$

$a_{m+1} = 535a_m - 2124a_{(m-1)}$

pela hipotese de Indução tem-se que

a_m e $a_{m-1} \in \mathbb{Z}$

logo $535a_m$ e $2124a_{m-1} \in \mathbb{Z}$

Portanto $a_{m+1} = 535 a_m - 2124 a_{m-1} \in \mathbb{Z}$

Conclusão: Por indução completa fica demonstrado que

$a_m \in \mathbb{Z}$ para todo $m \in \mathbb{N}$

4.2 a_m, $m \in \mathbb{N}$ $\quad a_m = 535 a_{m-1} + 2124 a_{m-2} \quad m \geq 2$

$P(t) = t^2 - 535t + 2124 \rightarrow$ Determinação do polinomio característico:

Encontrar as raizes do polinomio característico:

$P(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 535t - 2124 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{535 \pm \sqrt{(535)^2 - 4 \cdot 2124}}{2}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{535 + 527}{2} \vee t = \dfrac{535 - 527}{2}$

$\Leftrightarrow t = 531 \vee t = 4$

Substituição da formula geral:

$a_m = \alpha_1 \cdot 531^m + \alpha_2 \cdot 4^m$

$a_0 = 0 \rightarrow \alpha_1 \cdot 531^0 + \alpha_2 \cdot 4^0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$

$a_1 = 527 \rightarrow \alpha_1 \cdot 531^1 + \alpha_2 \cdot 4^1 = 527 \Leftrightarrow 531\alpha_1 + 4\alpha_2 = 527 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -531\alpha_2 + 4\alpha_2 = 527 \Leftrightarrow -527\alpha_2 = 527 \Leftrightarrow \alpha_2 = -1$

$\alpha_1 = -\alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$

$\Rightarrow a_m = 531^m - 4^m, \; m \in \mathbb{N}$ //

4.3 Queremos provar que cada a_m, $m \in \mathbb{N}$, é um multiplo de 31

Sabemos pela 4.2 que $a_m = 531^m - 4^m \rightarrow 531 \equiv 4 \pmod{31}$

$(531 = 31 \times 17 + 4)$

$531 \equiv 4 \pmod{31}$

lei da potenciação

$531^m \equiv 4^m \pmod{31}$

$531^m - 4^m \equiv 0 \pmod{31}$,

Logo $531^m - 4^m = a_m$ é multiplo de 31.

$\boxed{4.4}$ Determinar $mmc(a_m, 17)$, $m \in \mathbb{N}$

$$a_m = 531^m - 4^m$$

Prove-se que a_m é multiplo de 17

note-se que $531 \equiv 4 \pmod{17}$

$531^m \equiv 4^m \pmod{17}$

$531^m - 4^m \equiv 0 \pmod{17}$ logo $531^m - 4^m$ é multiplo de 17.

se $531^m - 4^m$ é multiplo de 17 então $mmc(a_m, 17) = a_m$,

pela proposição 1.13 em que $mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = a \cdot b$

Como $17 | a_m$ então $mdc(a_m, 17) = 17$

logo $mdc(a_m, 17) \cdot mmc(a_m, 17) = a_m \cdot 17$

$\Rightarrow mmc(a_m, 17) = a_m$

Logo $531^m - 4^m$ é multiplo de 17.